新物理学シリーズ 23

山内恭彦監修

ゲージ場の量子論 I

京都大学教授 理学博士

九後 汰一郎 著

培風館

はしがき

1970年代初頭G. 't Hooftが非可換ゲージ理論のくりこみ可能性を証明して以来，素粒子論は飛躍的な展開を遂げた。すなわち，一方で，弱い相互作用と電磁相互作用の統一理論として，Weinberg-Salam理論が，中性カレントやW, Zボソンの予言など，輝かしい成功を収めた。他方，漸近的自由性などの重要な発見を契機として，今日量子色力学(QCD)と呼ばれるクォーク場の非可換ゲージ理論が素粒子世界の複雑多岐にわたる強い相互作用を正しく記述する理論として確立したのである。

これらの進展は，すべての相互作用を一つの幾何学として統一しようというEinsteinの夢がもはや夢ではなく現実のものとして実現できる射程内に我々がすでに居るのだという認識を多くの物理学者にもたらした。なぜなら，今や自然界に存在する四つの相互作用——電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用それに重力相互作用——はすべて**ゲージ場**によって媒介される普遍的・幾何学的な相互作用であることが明らかになったからである。前者三つの相互作用はコンパクト群の対称性[Weinberg-Salam模型は $SU(2)\times U(1)$，QCDは $SU(3)$]に基づくYang-Millsゲージ場によるものであり，最後の重力相互作用は非コンパクト群[Poincaré群]に基づくゲージ理論なのである。実際70年代の後半以来，まず，弱・電磁相互作用と強い相互作用とを一つのゲージ群[$SU(5)$, $SO(10)$, E_6など]に基づくゲージ理論として統一しようといういわゆる大統一理論の試みが現れ，続いて，4次元以上の時空での一般相対論として，4次元の重力も含めたすべてのゲージ相互作用を導こうとするKaluza-Klein流のアプローチも精力的に研究された。これらはさらに，超対称性[ボソン-フェルミオン間の対称性]を採り入れた超重力理論，そして今日では，すべてのゲージ場および物質構成粒子をひもだと考える弦理論や超対称弦(superstring)理論，の試みへと受け継がれている。

本書は，このような飛躍的発展を遂げてほとんどその面目を一新した場の量子論，特にゲージ場の量子論を，できるだけわかりやすく解説しよう

というものである。骨子は筆者が修士課程1年生の物理学科の学生を対象に行ってきた講義のメモをもとにしているが，本書では，初等的なところも詳しく議論したので，理工系学部の学生で量子力学の初等的知識があれば，大学3，4年生でも十分理解できる内容になっていると思う。

本書の内容は，目次を見ていただけば，各節内の小項目名も載っているのでよくわかると思うが，少し説明を加えておこう。1～3章は，相対論的場の量子論の基礎的事柄を扱った。4章は経路積分についてである。経路積分法は，数学的に厳密な定義を与えるのはなかなか難しいが，量子化の方法として直観的に大変見通しのよいもので，70年代のゲージ理論の発展にも重要な役割を果たした。ここの記述は標準的であるが，他書ではあいまいにされているような点も明確にしたつもりである。

5章は前半の中心をなす部分である。この章では，ゲージ場の量子論で特に重要な役割を果たすBRS不変性，それに基づくゲージ理論のLorentz共変な演算子型式を詳しく説明した。この演算子型式はゲージ理論の構造を大変明解にするものであるが，他書ではほとんど触れられていない。

6章では，今や場の理論にとって最も重要な概念の一つとなった対称性の自発的破れを議論する。南部-Goldstoneの定理やHiggs現象についての記述はやや標準的であるが，他の教科書ではあまり触れていない低エネルギー定理や非線形表現についても説明しておいた。最後の節は少し長くなったがWeinberg-Salam模型について重要な事柄をもらさず述べた。

7,8章はくりこみを扱った。筆者は，場の理論の勉強を始めた頃，くりこみがよくわからなくて長い間困った経験がある。そこで本書では，初めにくりこみとは結局何をやることなのか，物理的な意味が明確になるよう説明した(つもりである)。複合演算子のくりこみや演算子積展開などは，比較的高度な内容なので入門書では割愛されることも多いが，強い相互作用への応用上の重要性を考慮してあえて加えることにした。わかりやすく説明したつもりであるが，もし難しければ初読の際はとばしてもらってよい。

9章は量子異常とも呼ばれるアノマリーを扱った。アノマリーは発見以来20年経つが，つい最近まで次々とその種々な深い意味が明らかにされ続けてきたもので，本書ではそれらを詳しく説明した。

ゲージ場の量子論は，非常に豊かな内容と精緻な構成を持った，人類の文化の素晴らしい創造物であるが，果たして本書がその美しさを読者にう

まく伝え得たか心もとない。わかりやすくと思うあまり説明がくどくなった部分もあるかもしれない。しかし筆者の示したかったことは，場の理論は確かに進んだレベルの学問であるけれども，難しいものではないということである。本書を読んでこの分野に興味を覚え，近い将来この分野の研究をさらに発展させてくれる読者がいれば，著者の喜びこれに勝るものはない。

本書を書くよう勧めていただいた中西 襄先生には，研究上の御指導をはじめひとかたならぬ御世話になった。また5章の内容については，小嶋泉氏との共同研究に負う所が多い。培風館の野原 剛，村山高志両氏は，なかなか原稿を書こうとしない筆者を8年間も忍耐強く激励して下さった。編集段階では編集部の飯島純子氏にもお世話になった。これらの方々に心から感謝したい。また，原稿執筆中の1年間は家族にも大変迷惑をかけた。妻 和子の助けには特に感謝している。最後に，常に私を支え励ましてきてくれた母 初子にこの本を献げたい。

1989年6月

九後 汰一郎

目　次

3. 相互作用系の一般的性質と S 行列　60～76

4. 経路積分と摂動論　77～136

5. ゲージ場の量子論　137～244

II巻 主要目次

1. Lorentz 群の表現と場

1-1　Lorentz 群

素粒子論における場の理論の基本的な性格の一つは，Lorentz (ローレンツ) 不変性である。ここでは記号の確定のためにもまず簡単におさらいをする。

4 次元記法　時間 t と空間座標 $\boldsymbol{x}$ とをまとめて

$$x^{\mu}=(t,\boldsymbol{x})=(x^0,x^1,x^2,x^3) \qquad \mu=0,1,2,3 \tag{1}$$

と記し，上付き添字の 4 元ベクトル (4-ベクトル) または反変ベクトルと呼ぶ。二つの 4 元ベクトル x と y の内積が

$$x\cdot y\equiv xy\equiv g_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu}=x^0y^0-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \tag{2}$$

で与えられる不定計量空間を 4 次元 Minkowski (ミンコフスキー) 空間という。ここで $g_{\mu\nu}$ は，Minkowski 計量テンソル

$$g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}=\begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

であり，その逆行列のテンソル $g^{\mu\nu}$ と同一である：

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho}=\delta^{\mu}_{\rho}. \qquad (\delta^{\mu}_{\nu}：\text{Kronecker のデルタ}) \tag{4}$$

この計量テンソル $g_{\mu\nu}$ およびその逆 $g^{\nu\mu}$ を使って，ベクトルやテンソルの添字を自由に上げ下げすることができる。x^{μ} の添字を $g_{\mu\nu}$ で下げて

$$x_{\mu}\equiv g_{\mu\nu}x^{\nu}=(x^0,-\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

をつくれるが，これを共変ベクトルと呼ぶ。逆にこれから $g^{\mu\nu}$ で添字を上げると，もとの反変ベクトルに戻る：

$$g^{\mu\nu}x_{\nu}=g^{\mu\nu}g_{\nu\rho}x^{\rho}=\delta^{\mu}_{\rho}x^{\rho}=x^{\mu}. \tag{6}$$

同様に任意のテンソルの任意の添字を上げ下げする。例えば

$$T_{\mu\nu}=g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}T^{\rho\sigma},\qquad T_{\mu}{}^{\nu}=g_{\mu\rho}T^{\rho\nu},\qquad T^{\mu\nu}=g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}T_{\rho\sigma},\tag{7}$$

など。この意味で，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の添字を二つとも上げたものが逆テンソル $g^{\mu\nu}$ になっており，$g^{\mu\nu}$ と書くことを正当化する。また一つだけ上げたテンソル $g^{\mu}{}_{\nu}$ は，単位行列 δ^{μ}_{ν} そのものである。

Lorentz 変換　4 元ベクトル x^{μ} の線形変換

$$x^{\mu}\longrightarrow x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\tag{8}$$

で，ノルム

$$x^{2}\equiv g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}=x^{\mu}x_{\mu}\tag{9}$$

を不変に保つものを Lorentz 変換と呼ぶ。したがって，Λ は

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=g_{\rho\sigma}\tag{10}$$

を満たす。添字上げ下げの規則より $g^{\tau\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}=\Lambda_{\nu}{}^{\tau}$ と書けるから，(10) の両辺に $g^{\tau\rho}$ を掛けて次式を得る。

$$\Lambda_{\nu}{}^{\tau}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=\delta^{\tau}_{\sigma}\qquad\therefore\quad\Lambda_{\nu}{}^{\tau}=(\Lambda^{-1})^{\tau}{}_{\nu}.\tag{11}$$

すなわち，もとの $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ から，上付き添字を下げ，下付き添字を上げて得られる $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ は，もとの行列 Λ の転置逆行列 $(\Lambda^{-1})^{T}$ になっている。共変ベクトル x_{μ} の Lorentz 変換は，この転置逆行列で自然な形に書ける。

$$x_{\mu}\longrightarrow x'_{\mu}=\Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}=x_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}.\tag{12}$$

任意のテンソル $T_{\mu_1\mu_2\cdots}{}^{\nu_1\nu_2\cdots}$ の Lorentz 変換は，下付き添字は共変ベクトル，上付き添字は反変ベクトルとして変換するものとして定義される：

$$T'_{\mu_1\mu_2\cdots}{}^{\nu_1\nu_2\cdots}=\Lambda_{\mu_1}{}^{\rho_1}\Lambda_{\mu_2}{}^{\rho_2}\cdots\Lambda^{\nu_1}{}_{\sigma_1}\Lambda^{\nu_2}{}_{\sigma_2}\cdots T_{\rho_1\rho_2\cdots}{}^{\sigma_1\sigma_2\cdots}.\tag{13}$$

定数の不変テンソルが二つだけ存在する。一つは計量テンソル $g^{\mu\nu}$，あるいはその添字を上げ下げした δ^{μ}_{ν} や $g_{\mu\nu}$ で，もう一つは，4 階完全反対称テンソル

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\qquad(\text{完全反対称で }\epsilon^{0123}=+1)\tag{14}$$

あるいはその添字を上げ下げしたもの，である。これらの Lorentz 変換の下での不変性は次式より明らかであろう。

$$g'^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}g^{\rho\sigma}=\Lambda^{\mu\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=g^{\mu\rho}\Lambda_{\rho}{}^{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=g^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\rho}=g^{\mu\nu},\tag{15}$$

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\det\Lambda.\tag{16}$$

(15) では (11) を使った。ここで (16) には $\det\Lambda$ が現れているが，(10) より

$$(\det\Lambda)^{2}=1\longrightarrow\det\Lambda=\pm1\tag{17}$$

が従うので，$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\det\Lambda=+1$ のとき不変で，-1 のとき符号を変えるこ

とがわかる。

Lorentz 変換 Λ 全体のなす群を Lorentz 群あるいは擬直交群 $O(3,1)$ と呼ぶが，この群は四つの連結成分から成る。(17) で見た $\det\Lambda=+1$ の成分と -1 の成分は，互いに連続的には移らない非連結な成分である。さらに (10) の $\rho=\sigma=0$ 成分より，

$$(\Lambda^0{}_0)^2=1+(\Lambda^i{}_0)^2\geqq 1 \tag{18}$$

が従うので，$\Lambda^0{}_0\geqq 1$ の成分と $\Lambda^0{}_0\leqq -1$ の成分とにも分離することがわかる。したがって都合四つの連結成分

1) proper ($\det\Lambda=+1$) orthochronous ($\Lambda^0{}_0\geqq 1$)：
単位元 1 に連結な成分

2) improper ($\det\Lambda=-1$) orthochronous ($\Lambda^0{}_0\geqq 1$)：
空間反転 P に連結な成分

3) improper ($\det\Lambda=-1$) anti-orthochronous ($\Lambda^0{}_0\leqq -1$)：
時間反転 T に連結な成分

4) proper ($\det\Lambda=+1$) anti-orthochronous ($\Lambda^0{}_0\leqq -1$)：
全反転 PT に連結な成分

から成る。特殊相対論は，本義 Lorentz 群とも呼ばれる 1) の proper-orthochronous Lorentz 群の下での不変性のみを要求する。他の連結成分 2) ～ 4) は，(本義 Lorentz 群の元) 掛ける (それぞれの代表元)

$$P=\begin{pmatrix}+1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix},$$
$$T=\begin{pmatrix}-1&&&\\&+1&&\\&&+1&\\&&&+1\end{pmatrix}, \tag{19}$$
$$PT=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

という形で得られるので，離散的な変換 P や T を考慮するだけで充分である。

一般にテンソル T が Lorentz 変換で，(13) の代わりに

$$T'_{\mu_1\mu_2\cdots}{}^{\nu_1\nu_2\cdots}=(\det\Lambda)\Lambda_{\mu_1}{}^{\rho_1}\Lambda_{\mu_2}{}^{\rho_2}\cdots\Lambda^{\nu_1}{}_{\sigma_1}\Lambda^{\nu_2}{}_{\sigma_2}\cdots T_{\rho_1\rho_2\cdots}{}^{\sigma_1\sigma_2\cdots} \tag{20}$$

と変換するとき，擬テンソル (pseudo-tensor) [ベクトルのときは特別，軸性ベクトル (axial vector)] と呼ぶ。すなわち，擬テンソルは本義 Lorentz 変換では全く普通のテンソルとして振舞うが，空間反転や時間反転の improper な変換では普通の場合と符号を異にする。(16) は，完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ が不変擬テンソルであるといっている。

Lorentz 変換の定義から，あるいは (8) と (12) とから，明らかなように，上付き添字と下付き添字を縮約すれば不変となり，その一対の添字はもはや変換性を担わない。したがって縮約されずに残っている添字 (浮いている足という) のみで変換性が指定される。浮いている足が 1 個ならベクトル， 2 個なら 2 階のテンソル，$\cdots$ ということである。Lorentz 不変な量，スカラー，を作るには，それゆえ，単に種々なテンソルの積をつくり，すべての添字を縮約して浮いている足がないようにするだけでよい。ただし，このとき，擬テンソルを奇数個使った場合は擬スカラーとなる。例えば，x, y, z, w をすべてベクトルとすると

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} x_\mu y_\nu z_\rho w_\sigma \tag{21}$$

は，擬スカラーである。

無限小変換　以後，本義 Lorentz 変換を考えることにして，単位元近傍の無限小 Lorentz 変換を考えよう。

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \qquad (\epsilon^\mu{}_\nu \ll 1) \tag{22}$$

(10) を ϵ の 1 次のオーダーまで展開すると

$$g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}\epsilon^\mu{}_\rho + g_{\rho\nu}\epsilon^\nu{}_\sigma + O(\epsilon^2) = g_{\rho\sigma},$$

あるいは，ϵ の添字を下げて，

$$\epsilon_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu} = 0 \tag{23}$$

を得る。すなわち $\epsilon_{\mu\nu}$ は反対称テンソルで，${}_4C_2 = 6$ 個の独立なパラメータを表す。

さて Lorentz 変換 (8) を無限小の (22) の場合に

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \equiv \left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu x^\nu \tag{24}$$

と書き直そう。ここに 6 個の $M_{\rho\sigma} = -M_{\sigma\rho}$ や 1 はそれぞれ 4×4 行列で，$(1)^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$,

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\delta^\mu_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma g_{\rho\nu}) \tag{25}$$

である。この (25) の 6 個の独立な行列 $M_{\rho\sigma}$ は，直接計算で容易に確かめられるように

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \qquad (26)$$

の代数を満たす。

(24) の書き直しは，“抽象的” な本義 Lorentz 群 $SO(3,1)$ の元 $\hat{\Lambda}$ を

$$\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\hat{M}_{\rho\sigma}\right) \approx 1 - \frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\hat{M}_{\rho\sigma} \qquad (27)$$

と書くのに対応している。この $\hat{M}_{\rho\sigma} = -\hat{M}_{\sigma\rho}$ は $SO(3,1)$ 群に対応する Lie 代数の生成子 (generators) と呼ばれるもので，(25) で与えた 4×4 行列 $(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ は，この “抽象的” 生成子 $\hat{M}_{\rho\sigma}$ の 4 元ベクトル x^{μ} 上での一つの具体的**表現** (行列) である，とみなすことができる。したがって (26) の代数関係は表現によらず成立するもので，Lorentz 群の Lie 代数の生成子 $\hat{M}_{\rho\sigma}$ そのものが

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho}) \qquad (28)$$

を満たす。

1-2 いろいろな場：Lorentz 群の表現

場の理論における基本的な量は，時空の各点 x^{μ} で定義された場の量で，スカラー場なら 1 成分の $\phi(x)$，電磁場のようなベクトル場なら 4 成分の $A_{\mu}(x)$，であるが，一般の場合を何成分か (N 成分としよう) の組の $\varphi_i(x)$ で表すことにする。

場の Lorentz 変換　ある慣性系の観測者 O にとって座標 x^{μ} の時空点 P は，別の慣性系観測者 O′ には座標値 x'^{μ} が付与され，一般に

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad (1)$$

の Lorentz 変換で関係付けられる。このとき，O にとっての場 $\varphi(x)$ と O′ にとっての場 $\varphi'(x')$ とは，物理的に同一の点 P における場であるからお互いにつながっているはずである。スカラー場 ϕ の場合は，元来向きのない大きさのみの量であるから，同一点では同じ値を観測するはずだから

$$\phi'(x') = \phi(x), \qquad (2)$$

また，ベクトル場 A_{μ} の場合は，向きのある共変ベクトル量だから

$$A'_{\mu}(x') = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}(x), \qquad (3)$$

の関係がある。一般の場 φ_i の場合も線形関係式が期待され

$$\varphi'_i(x') = D(\Lambda)_i{}^j \varphi_j(x) \qquad \text{または} \qquad \varphi'(x') = D(\Lambda)\varphi(x) \qquad (4)$$

と書くことにする。$D(\Lambda)$ は Lorentz 変換 Λ ごとに決まる $N \times N$ 行列で

ある。

同一時空点 P をそれぞれ座標 x^μ, x'^μ, x''^μ で記述する三つの慣性系 O, O′, O″ があり，O-O′ 間の Lorentz 変換が Λ_1，O′-O″ 間が Λ_2 とすれば，O-O″ 間は $\Lambda_3=\Lambda_2\Lambda_1$ の Lorentz 変換でつながる：

$$x''^\mu=\Lambda_2{}^\mu{}_\nu x'^\nu=\Lambda_2{}^\mu{}_\nu \Lambda_1{}^\nu{}_\rho x^\rho=(\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\rho x^\rho. \tag{5}$$

このとき (4) の場の変換則を O′-O″ 間と O-O′ 間とに使ったもの，

$$\varphi''(x'')=D(\Lambda_2)\,\varphi'(x')=D(\Lambda_2)\,D(\Lambda_1)\,\varphi(x), \tag{6}$$

と直接 O-O″ 間に適用した $\varphi''(x'')=D(\Lambda_2\Lambda_1)\,\varphi(x)$ とを比較して

$$D(\Lambda_2\Lambda_1)=D(\Lambda_2)\,D(\Lambda_1) \tag{7}$$

を得る。一般に，群 G の元 g に行列 $D(g)$ を対応させる写像 D があって，$D(g_1 g_2)=D(g_1)\,D(g_2)$ が成立するとき，D を群 G の**表現**と呼ぶ。[群の意味の積 $g_1\cdot g_2$ が，行列としての積 $D(g_1)\cdot D(g_2)$ で表現されている。] すなわち，一般の場の量 φ の Lorentz 変換 (4) の行列 $D(\Lambda)$ は Lorentz 群の表現でなければならない†。したがって，どのような場があり得るかという問いは，どのような表現があるのかという問いと等価で，Lorentz 群の (既約) 表現をすべて見出せば，あらゆる可能な場のタイプを尽くすことができる。

Lorentz 群の表現 本義 Lorentz 群の表現を求めるには，無限小 Lorentz 変換

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu+\epsilon^\mu{}_\nu \qquad \text{または} \qquad \hat{\Lambda}=1-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu} \tag{8}$$

の場合の表現

$$D(\Lambda)_i{}^j=\delta_i{}^j-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_i{}^j\equiv\left(1-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)_i{}^j \tag{9}$$

を知れば充分である。実際，ここに現れている $N\times N$ 行列 $S_{\mu\nu}$ は，無限小 Lorentz 変換の生成子 $\hat{M}_{\mu\nu}$ の表現†† $D(\hat{M}_{\mu\nu})$ を与えているので，有限 Lorentz 変換

$$\hat{\Lambda}=\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right) \tag{10}$$

に対しては行列

---

† より精確には，$D(\Lambda)$ を表現行列，場の量 φ の張る (N 次元) ベクトル空間 V を表現空間，D と V とを組にした (D, V) を表現と呼ぶ。

†† 数学では，これを表現 D から誘導される微分表現と呼び，$D^*(\hat{M}_{\mu\nu})$ と書いて D とは区別するが，ここでは同じ記号 D を使う。

$$D(\hat{\Lambda})=\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}D(\hat{M}_{\mu\nu})\right)=\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right) \tag{11}$$

を対応させればよい。

一般に Lie 群の掛算の構造と Lie 代数の生成子の交換関係とは等価な内容を持っているので，表現 $D(\Lambda)$ に対応する生成子の表現行列 $S_{\mu\nu}=D(\hat{M}_{\mu\nu})$ は前節 (28) の $\hat{M}_{\mu\nu}$ の交換関係を満たさねばならない。

さて，これを満たす $S_{\mu\nu}$ をすべて求めるために，まず $\hat{M}_{\mu\nu}$ から

$$\begin{aligned} J_i &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{M}^{jk}=(\hat{M}_{23}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{12}) \\ K_i &\equiv \hat{M}_{i0}=-\hat{M}_{0i} \qquad (i,j,k=1,2,3) \end{aligned} \tag{12}$$

で角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ と，ブースト演算子 $\boldsymbol{K}$ とを定義し，前節 (28) の $\hat{M}_{\mu\nu}$ の交換関係を書き直す。そうすれば容易に

$$\begin{aligned} [J_i, J_j]&=i\epsilon_{ijk}J_k, \\ [J_i, K_j]&=i\epsilon_{ijk}K_k, \\ [K_i, K_j]&=-i\epsilon_{ijk}J_k, \end{aligned} \tag{13}$$

を得る。これはさらに

$$\boldsymbol{A}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}+i\boldsymbol{K}), \qquad \boldsymbol{B}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}-i\boldsymbol{K}) \tag{14}$$

で $\boldsymbol{A}$-スピン，$\boldsymbol{B}$-スピンを定義して書き直すと，簡明に

$$\begin{aligned} [A_i, A_j]&=i\epsilon_{ijk}A_k, \\ [B_i, B_j]&=i\epsilon_{ijk}B_k, \\ [A_i, B_j]&=0 \end{aligned} \tag{15}$$

となる。すなわち $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の演算子は，互いに可換で，それぞれがよく知っている角運動量代数——$SU(2)$ 群の Lie 代数——を満たす。したがって，角運動量の表現の知識からただちに，Lorentz 群の任意の有限次元既約表現は，$\boldsymbol{A}$-スピンの大きさ A と $\boldsymbol{B}$-スピンの大きさ B の組 (A, B) (A, B：整数または半整数) で指定され，その表現空間の次元は $(2A+1)(2B+1)$ 次元であることがわかる†。この表現に対応する場の量は，それゆえ，

$$\varphi_{a,b}^{(A,B)}(x) \qquad \begin{pmatrix} a=-A, -A+1, \cdots, A-1, A \\ b=-B, -B+1, \cdots, B-1, B \end{pmatrix} \tag{16}$$

---

† (14) で導入された演算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は hermite でないので，有限次元表現であることを仮定しないと A, B が半整数であることが出てこない。無限次元表現を許すと，これ以外の表現が可能である。しかも，実は，ローレンツ群のような非コンパクト群のユニタリー表現は無限次元表現しかないことが一般に知られている。

の形の $(2A+1)(2B+1)$ 成分場で，a, b は A_3, B_3 の固有値である。これで可能な既約な場のタイプをすべて見出したことになる。

$SL(2, C)$ スピノール　スピンの大きさ A, B はもちろん半整数または整数でなければならないから，最も簡単な表現は $(A, B)=(0, 1/2)$ および $(1/2, 0)$ の場合であり，それぞれ 2 次元表現である。

まず $(0, 1/2)$ の表現を考えよう。この場合の (16) の場 $\varphi(x)$ は 2 成分で，$\xi_\alpha(x)$ $(\alpha=1, 2)$ と記すことにする。$(A, B)=(0, 1/2)$ ということは，$\boldsymbol{A}$-スピン，$\boldsymbol{B}$-スピンが，ξ_α の上で，それぞれ

$$D(\boldsymbol{A})=0, \qquad D(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\sigma}/2 \qquad (\boldsymbol{\sigma}：\text{Pauli 行列}) \tag{17}$$

と表現されているということである。したがって，$\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ の表現は (14) より

$$D(\boldsymbol{J})=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \qquad D(\boldsymbol{K})=i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \tag{18}$$

である。有限 Lorentz 変換 (10) は，パラメータ $\epsilon^{\mu\nu}$ が

$$(\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12})=-\boldsymbol{\theta}, \qquad (\epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \epsilon_{30})=\boldsymbol{\omega} \tag{19}$$

で与えられるとき，

$$\hat{\Lambda}=\exp(i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}+i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}) \tag{20}$$

と書けるから，この $(0, 1/2)$ 表現の場合の 2×2 行列 $D(\Lambda)$ を $a_\alpha{}^\beta$ と記せば

$$a_\alpha{}^\beta=\left[\exp\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\right]_\alpha{}^\beta \tag{21}$$

を得る。(4) より，$\xi_\alpha(x)$ はこの $a_\alpha{}^\beta$ で

$$\xi'_\alpha(x')=a_\alpha{}^\beta\xi_\beta(x) \tag{22}$$

なる Lorentz 変換を受けることがわかる。

(21) の a は，角 $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\omega}$ を実数で変化させると，$\det a=1$ を満たす複素数上の 2×2 行列，すなわち $SL(2, \boldsymbol{C})$ の元，全体を走る。それゆえ (22) で変換する $\xi_\alpha(x)$ は，$SL(2, \boldsymbol{C})$ 群の **2** スピノールである。(20) と (21) で，Lorentz 群と $SL(2, \boldsymbol{C})$ 群の対応が与えられたわけであるが，実は，この対応は 1 対 2 の対応であることがわかる。実際，空間回転角 $\boldsymbol{\theta}$ の大きさ θ を $\theta+2\pi$ にすると (20) の Lorentz 群の元 $\hat{\Lambda}$ はもとに戻るが，(21) の $SL(2, \boldsymbol{C})$ の元 a は符号を変えて $-a$ になる。(a を本当にもとに戻すには 4π 回転しなければならない。)　$SL(2, \boldsymbol{C})$ のスピノール表現は，この意味で，Lorentz 群の 2 価表現であるといわれる。

次に，ξ_α の複素共役 $(\xi_\alpha)^*$ と同一の変換をする量を考え，それを $\eta_{\dot\alpha}$ $(\dot\alpha=1, 2)$ と記し，点付きスピノール (dotted spinor) と呼ぼう。[これに対し，

もとの ξ_α は点なし (undotted) スピノールと呼ぶ。]　すなわち

$$\eta'_{\dot\alpha}(x')=a^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}(x) \qquad [a^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\equiv(a_\alpha{}^\beta)^*] \tag{23}$$

と変換する量で，$SL(2,\boldsymbol{C})$ の $\mathbf{2}^*$ スピノールともいう。a^* からこのときの $\boldsymbol{A}$-スピン，$\boldsymbol{B}$-スピンの表現行列を読み取ると

$$D(\boldsymbol{A})=-\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}, \qquad D(\boldsymbol{B})=0, \tag{24}$$

であって，これが $(A,B)=(1/2,0)$ の表現であることがわかる†。

スピノール算法

1)　**添字の上下**　スピノール添字の上げ下げは，$SL(2,\boldsymbol{C})$ の不変テンソルである 2 階反対称テンソル $\epsilon^{\alpha\beta}\equiv\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\equiv\epsilon_{\alpha\beta}\equiv\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\equiv i\sigma_2$ で行う。

$$\xi^\alpha=\epsilon^{\alpha\beta}\,\xi_\beta, \qquad \eta^{\dot\alpha}=\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}. \tag{25}$$

ただしこの場合 $\epsilon^T=\epsilon^{-1}=-\epsilon$ であるので，再度下げるときは注意が必要：

$$\xi_\alpha=-\epsilon_{\alpha\beta}\,\xi^\beta=\xi^\beta\,\epsilon_{\beta\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha}=-\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\eta^{\dot\beta}=\eta^{\dot\beta}\,\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha} \tag{26}$$

すなわち規則として「左が上，右が下」の↘の形の添字の縮約を常にとるようにしておけば負符号はあらわには出ない。

2)　**スカラー**　点なしスピノール二つ，ξ_α と Ξ_α，からは，あるいは点付きスピノールどうし，$\eta_{\dot\alpha}$ と $H_{\dot\alpha}$，からは，スピノール添字の縮約ができてスカラー量がつくれる：

$$\xi^\alpha\,\Xi_\alpha=\epsilon^{\alpha\beta}\,\xi_\beta\,\Xi_\alpha=-\xi_\beta\,\Xi^\beta, \qquad \eta^{\dot\alpha}\,H_{\dot\alpha}=-\eta_{\dot\alpha}\,H^{\dot\alpha}. \tag{27}$$

これらがスカラーであることは，一般に 2×2 行列 M の場合，その余因子行列が，反対称テンソルの行列 ϵ を使って，$\epsilon M^T\epsilon^T$ で与えられること，すなわち

$$\epsilon\,M^T\epsilon^T=(\det M)\,M^{-1} \tag{28}$$

の関係式が成り立つこと，に気付けばすぐわかる。実際 (22) の Lorentz 変換式より，$\xi^\alpha\,\Xi_\alpha=\xi^T\epsilon^T\,\Xi$ の変換は，$\epsilon^T\epsilon=1$ と (28) を使って

$$(\xi^T\epsilon^T\,\Xi)'=\xi^Ta^T\epsilon^Ta\Xi=\xi^T\epsilon^T\epsilon a^T\epsilon^Ta\Xi=(\det a)\xi^T\epsilon^T\,\Xi \tag{29}$$

となる。a は $SL(2,\boldsymbol{C})$ の元だから $\det a=1$ で，スカラーであることがわかる。$\eta^{\dot\alpha}H_{\dot\alpha}$ も同様である。

点なしスピノール **2** どうし，点付き **2*** どうし，でスカラーがつくれる事情は，$\boldsymbol{A}$-スピン，$\boldsymbol{B}$-スピンの言葉を使っても明らかである。$\boldsymbol{A}$-，$\boldsymbol{B}$-スピンは別々に合成でき，1/2 と 1/2 の合成で 0 と 1 ができるから

---

† (25) に従って添字を上げた基底 $\eta^{\dot\alpha}=\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}$ で，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ スピンの表現を見直せば，(24) は $\epsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\epsilon^{-1}=\boldsymbol{\sigma}$ だから本当に $D(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\sigma}/2$，$D(\boldsymbol{B})=0$ となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{2}\times\mathbf{2}\ &: \left(0,\frac{1}{2}\right)\times\left(0,\frac{1}{2}\right)=(0,0)\oplus(0,1) \\ \mathbf{2}^*\times\mathbf{2}^* &: \left(\frac{1}{2},0\right)\times\left(\frac{1}{2},0\right)=(0,0)\oplus(1,0) \end{aligned} \tag{30}$$

となり，点なし，点付きどちらの場合でもスカラーになる成分 (0, 0) が確かにある。残りのスピン 1 の成分，(0, 1) と (1, 0)，は 3 成分ずつあり，すぐ後の 4) で述べるように 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ (6 成分) に対応する。

3) **4-ベクトル** 点なしと点付きスピノール 1 個ずつの場合，合成則は

$$\mathbf{2}\times\mathbf{2}^* : \left(0,\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{31}$$

であり，唯一つの既約表現 $(A,B)=(1/2,1/2)$ が現れる。これは 4 成分量だから， 4 元ベクトルでなければならない。

この 1 対の点なし・点付きスピノール添字の組 $(\alpha,\dot{\beta})$ とベクトル添字 μ の間をつなぐ変換行列は，次の 4 次元化した Pauli 行列

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\equiv(1,\boldsymbol{\sigma}), \qquad (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\equiv(1,-\boldsymbol{\sigma}) \tag{32}$$

で与えられる。スピノール添字の位置に注意せよ。この位置を標準位置と呼び，これ以後単に σ_μ とか $\bar{\sigma}_\mu$ と書いた場合には，それぞれ，(32) のスピノール添字の位置の意味での行列と解することにする†。容易に確かめられるように，

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma_\nu)=\delta^\mu_\nu, \qquad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}=2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}\ , \tag{33}$$

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu+\sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu=\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu+\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu=2g_{\mu\nu}. \tag{34}$$

また，(20) と (21) とから，次式を確かめるのも困難ではない：

$$\sigma_\mu\Lambda^\mu{}_\nu=a\sigma_\nu a^\dagger \tag{35}$$

あるいは，これに x_ν を掛けて，$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ だから，

$$\boldsymbol{x}'=a\boldsymbol{x}a^\dagger, \qquad \boldsymbol{x}\equiv x^\mu\sigma_\mu=\begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} \tag{36}$$

と書いてもよい。この式 (36) は， 4 元ベクトル x^μ の Lorentz 変換を，$SL(2,\boldsymbol{C})$ の元 a で直接表すものになっており，(35) あるいは (36) が，有名な Lorentz 群の元と $SL(2,\boldsymbol{C})$ 群の元の間の対応

---

† $\bar{\sigma}_\mu$ のスピノール添字を標準位置から下ろして，$(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta}\equiv\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\,\epsilon_{\beta\delta}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$ を定義すると，これは σ_μ の複素共役となる：$(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta}=[(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}]^*$. すなわちバーはもともと複素共役の意味なのである。

$$\begin{aligned}&\text{Lorentz 群 } SO(3,1)=\{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\}\\&\xleftrightarrow{1\text{対}2} SL(2,\boldsymbol{C})=\{a_{\alpha}{}^{\beta}\mid\det a=1,\ a_{\alpha}{}^{\beta}\in\boldsymbol{C}\}\end{aligned}\tag{37}$$

を与える式である。σ_μ のスピノール添字の構造が (32) に与えた $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}$ であることは，(35) と，a と $a^\dagger$ とが (22) より $a_\alpha{}^\beta$，$(a^\dagger)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ の添字構造を持っている事実とからわかる。

この σ_μ を使って，点なしスピノール ξ_α と点付きの $\eta_{\dot\alpha}$ から，望みの 4 元ベクトル量 V_μ がつくれる：

$$V_\mu=\xi^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\eta^{\dot\beta}=\xi_\alpha(\epsilon^T\sigma_\mu\,\epsilon)^{\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}=\xi_\alpha(\bar\sigma_\mu{}^T)^{\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}.\tag{38}$$

実際 Lorentz 変換 (22),(23) を行うと，この量は

$$V'_\mu=\xi'^T\epsilon^T\sigma_\mu\,\epsilon\eta'=\xi^Ta^T\epsilon^T\sigma_\mu\,\epsilon a^*\,\eta=\xi^T\epsilon^Ta^{-1}\,\sigma_\mu\,a^{\dagger-1}\,\epsilon\eta\tag{39}$$

と変換する。ここで (28) および $\det a=1$ から従う

$$\epsilon a^T\epsilon^T=a^{-1},\qquad \epsilon a^*\,\epsilon^T=a^{\dagger-1}\tag{40}$$

を使った。しかるに (35) から

$$a^{-1}\,\sigma_\mu\,a^{\dagger-1}=\Lambda_\mu{}^\nu\,\sigma_\nu\tag{41}$$

が従うから，(39) は V_μ が確かに共変ベクトルとして振舞う，$V'_\mu=\Lambda_\mu{}^\nu\,V_\nu$，ことを示している。

したがって，一般にベクトル V_μ と，点なし・点付き混合スピノール (mixed-spinor) $V_{\alpha\dot\beta}$ とは，一つの量の単に異なる表示とみなせて，互いに

$$V_{\alpha\dot\beta}=V^\mu(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta},\qquad V^\mu=\frac{1}{2}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\,V_{\alpha\dot\beta}\tag{42}$$

で移り合う。

4) **2 階反対称テンソル** 複素数の 2 階反対称テンソル $F^\pm_{\mu\nu}$ で，

$$F^{\pm\mu\nu}=\pm\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,F^\pm_{\rho\sigma}\tag{43}$$

を満たすとき，$F^+_{\mu\nu}$ を自己双対 (self-dual) な，$F^-_{\mu\nu}$ を反自己双対な，テンソルと呼ぶ。$F^\pm_{\mu\nu}$ はそれぞれ，${}_4C_2/2=3$ 成分の (複素) 量である。上の (30) に現れている $(A,B)=(0,1)$ および $(1,0)$ の量も，それぞれ，点なしスピノールどうし，点付きスピノールどうし，を対称に組んで得られる 3 成分の量

$$F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\xi_\alpha\,\Xi_\beta+\xi_\beta\,\Xi_\alpha)\equiv\frac{1}{2}\xi_{(\alpha}\Xi_{\beta)},\qquad \bar F_{\dot\alpha\dot\beta}=\frac{1}{2}\eta_{(\dot\alpha}H_{\dot\beta)}\tag{44}$$

である。一般に，対称純粋スピノール (pure-spinor) $F_{\alpha\beta}$ および $\bar F_{\dot\alpha\dot\beta}$ は，それぞれ自己双対および反自己双対な 2 階反対称テンソル $F^\pm_{\mu\nu}$ と等価であり，その間をつなぐ変換行列は

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta &\equiv \frac{i}{2}(\sigma^\mu\,\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\,\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta,\\
(\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &\equiv \frac{i}{2}(\bar\sigma^\mu\,\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\,\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

で与えられる。標準位置のスピノール添字を持った σ^μ, $\bar\sigma^\mu$ の掛算で，ここに書いたスピノール添字の位置と構造になることに注意せよ。この位置を $\sigma^{\mu\nu}$ および $\bar\sigma^{\mu\nu}$ の場合のスピノール添字標準位置と呼び，特に断らない限りこの位置の意味の行列と解する。

容易に確かめられるように，$\sigma^{\mu\nu}$, $\bar\sigma^{\mu\nu}$ は

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{\mu\nu} = +\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\sigma_{\rho\sigma}, \qquad \bar\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\bar\sigma_{\rho\sigma},\\
&(\sigma^{\mu\nu}\,\epsilon)_{\alpha\beta} = [(\epsilon^T\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}]^* : \alpha, \beta \text{ に関し対称}\\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\sigma^{\mu\nu}\,\sigma_{\rho\sigma}) = \delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma} + i\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma},\\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\bar\sigma^{\mu\nu}\,\bar\sigma_{\rho\sigma}) = \delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma} - i\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma},
\end{aligned}
\quad
\begin{pmatrix}
\delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \equiv \delta^\mu_\rho\,\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\,\delta^\nu_\rho\\
\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \equiv g_{\rho\kappa}\,g_{\sigma\lambda}\,\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}
\end{pmatrix}
\tag{46}
$$

の諸等式を満たすので，望みの (反) 自己双対テンソル $F^\pm_{\mu\nu}$ と純粋スピノール $F_{\alpha\beta}$, $\bar F_{\dot\alpha\dot\beta}$ との間の等価関係式が

$$
F_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\sigma^{\mu\nu}\,\epsilon)_{\alpha\beta}\,F^+_{\mu\nu}, \qquad \bar F_{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{i}{2}(\epsilon^T\,\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}\,F^-_{\mu\nu}, \tag{47}
$$

$$
F^+_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\epsilon\sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}\,F_{\alpha\beta}, \qquad F^-_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}(\bar\sigma_{\mu\nu}\,\epsilon^T)^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar F_{\dot\alpha\dot\beta}, \tag{48}
$$

と与えられることがわかる。

実 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ (実 6 成分) の場合，常に，互いに複素共役な，自己双対部分と反自己双対部分に分解できる：

$$
\begin{aligned}
&F_{\mu\nu} = F^+_{\mu\nu} + F^-_{\mu\nu}, \qquad F^-_{\mu\nu} = (F^+_{\mu\nu})^*,\\
&F^\pm_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} \pm \tilde F_{\mu\nu}), \qquad \tilde F^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,F_{\rho\sigma}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

したがって，このとき，(47) で対応する純粋スピノールも互いに複素共役，$\bar F_{\dot\alpha\dot\beta} = (F_{\alpha\beta})^*$，であって，ちょうど実 6 成分含んでいることになる。

ついでながら，(45) の $\sigma^{\mu\nu}$ 行列は，(32) の σ_μ, $\bar\sigma_\mu$ の定義を使って

$$
(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \qquad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma} \tag{50}
$$

であることがわかる。ところが，これはちょうど (0, 1/2) 表現 ξ_α スピノール上での $\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{K}$ の表現行列 (18) の 2 倍である。すなわち，$(1/2)\sigma_{\mu\nu}$ は，ξ_α の上での Lorentz 群生成子 $\hat M_{\mu\nu}$ の表現になっている：

$$D(\hat{M}_{\mu\nu})=\sigma_{\mu\nu}/2. \tag{51}$$

したがって，(11) を考慮して，ξ_α の Lorentz 変換 (21), (22) は

$$\xi'_\alpha(x')=a_\alpha{}^\beta\,\xi_\beta(x)=\left[\exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\,\sigma_{\mu\nu}\right)\right]_\alpha{}^\beta\,\xi_\beta(x) \tag{52}$$

と書ける。また，(23) より，$\eta^{\dot\alpha}=\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}$ の Lorentz 変換が

$$\eta'^{\dot\alpha}(x')=(\epsilon a^*\,\epsilon^T)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\eta^{\dot\beta}(x)=\left[\exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\,\bar\sigma_{\mu\nu}\right)\right]^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\eta^{\dot\beta}(x) \tag{53}$$

と，(45) の $\bar\sigma^{\mu\nu}$ で書かれることもすぐわかる。

さて，以上で割合詳しくスピノール算法をやったので，今や一般の場合も明らかであろう。

一般の既約表現　スピン j の既約表現は，$2j$ 階完全対称スピノールで与えられるから，一般の $\boldsymbol{A}$-, $\boldsymbol{B}$-スピンが (A,B) の既約表現の場は，

$$\varphi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2B};\,\dot\beta_1\dot\beta_2\cdots\dot\beta_{2A}}(x) \tag{54}$$

のように，$2B$ 個の完全対称な点なしスピノール添字と，$2A$ 個の完全対称点付き添字とを持つ量である。Lorentz 群の表現としての既約性は (54) のような $SL(2,\boldsymbol{C})$ スピノール表示が最も簡明だが，ベクトル・テンソル表示が必要になる場合もある。ベクトル・テンソル表示への移行は，上述 (32) と (45) で与えた変換行列 σ_μ, $\bar\sigma_\mu$, $\sigma_{\mu\nu}$, $\bar\sigma_{\mu\nu}$ を用いて行う。すなわち，まず混合スピノールの各対 $(\alpha,\dot\beta)$ は，$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}$ を通じて，ベクトル添字 μ に変換する。これを点付き・点なしスピノール添字のどちらかがなくなるまで続ける。残った添字は，点なしか点付き添字ばかりだから，その添字の 2 つずつを，$(\sigma^{\mu\nu}\,\epsilon)_{\alpha\beta}$ か $(\epsilon^T\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}$ かで，(反)自己双対な反対称テンソル添字 $[\mu\nu]$ に変換する。この操作により，$A+B$ が整数の場合完全なテンソルに，半整数の場合，一個のスピノール添字だけが残ったテンソル-スピノールに書き変えることができる：例えば $(A,B)=(s/2,(s+2k)/2)$ [s,k：整数] のときは

$$\varphi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s\alpha_{s+1}\cdots\alpha_{s+2k};\,\dot\beta_1\dot\beta_2\cdots\dot\beta_s} \longleftrightarrow \varphi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s[\rho_1\sigma_1][\rho_2\sigma_2]\cdots[\rho_k\sigma_k]} \tag{55}$$

のような対応となる。しかし，右側のテンソル表示での既約性の要求は，かなり複雑な条件となり，あまり一般の場合は実用的でない。

最も“実用的”な例は，$(A,B)=(1/2,1), (1,1/2)$ の場合で

$$\psi_{\alpha\alpha_1;\,\dot\beta_1}\longleftrightarrow\psi_{\alpha\mu},\qquad \psi_{\alpha_1;\,\dot\beta_1\dot\beta}\longleftrightarrow\psi_{\dot\beta\mu} \tag{56}$$

の対応となる。ここに現れるベクトル-スピノール場 $(\psi_{\alpha\mu},\psi_{\dot\beta\mu})$ は，スピン

3/2 の粒子を記述する Rarita-Schwinger 場と呼ばれる。

1-3 Noether の定理

1-1 の初めから，我々は Lorentz 不変性ということを論じてきたが，そもそも，不変性あるいは対称性という概念は，素粒子論にとって最も基本的なもので，それを見出すということが中心的な研究方法の一つであった。ここでは，特に作用積分 (action) が力学変数の連続的パラメータを持った変換 (連続変換と呼ぶ) の下で不変だとすると，必ず保存量が存在することを主張する Noether (ネター) の定理を，場の理論の場合の形で述べる。

今，系の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が，この系の一般の場 $\varphi_i(x)$ とその 1 階微分 $\partial_\mu\varphi_i(x)$ の関数で，作用積分 S が†

$$S[\varphi]=\int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu\varphi_i(x)) \qquad (d^4x\equiv dx^0dx^1dx^2dx^3) \tag{1}$$

で与えられているとする。これを場 $\varphi_i(x)$ で変分して，停留条件より

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi_i(x)}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i(x)}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}\right)=0, \tag{2}$$

なるよく知られた Euler (オイラー)-Lagrange (ラグランジュ) 方程式を得る。

Noether の定理　作用積分 S が，ϵ をパラメータとする無限小変換

$$\varphi_i(x)\longrightarrow\varphi_i'(x)=\varphi_i(x)+\epsilon\, G_i(\varphi(x)) \tag{3}$$

の下で不変，$S[\varphi]=S[\varphi']$，だとする。作用積分の不変性は，Lagrangian 密度の変化分が (あっても) せいぜい全微分であること，すなわち，

$$\delta\mathcal{L}=\mathcal{L}(\varphi'(x), \partial_\mu\varphi'(x))-\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))=\epsilon\partial_\mu X^\mu(\varphi(x)) \tag{4}$$

の形に恒等式として書ける $X^\mu(\varphi)$ があることを意味している。一方，$\mathcal{L}$ の変換 (3) の下での変化分は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=(\partial\mathcal{L}/\partial\varphi_i)\epsilon G_i(\varphi)+(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi_i))\epsilon\partial_\mu G_i(\varphi)\\&=\epsilon[\partial_\mu(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi_i))\cdot G_i(\varphi)+(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi_i))\partial_\mu G_i(\varphi)]\end{aligned} \tag{5}$$

と評価される。ここで第 1 行では，変換パラメータ ϵ が x によらない (大局的変換) ことを，第 2 行の等式では Euler-Lagrange の運動方程式 (2) を，それぞれ使った。(4) と (5) とを等置すると

† このテキストでは，変数 x の関数 f は $f(x)$，関数 f の汎関数 F は $F[f]$ という記号を使う。

$$j^\mu(x)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}G_i(\varphi(x))-X^\mu(\varphi(x)) \tag{6}$$

なるカレント (current) $j^\mu(x)$ の保存則

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0 \tag{7}$$

が従う。(6) のカレントは Noether カレントと呼ばれる。この導出で明らかなように，上の $G_i(\varphi)$ や $X^\mu(\varphi)$ は略記であって，φ の微分に依存していても全くかまわない。

Noether の定理に関連して，もう一つ注意しておくべき重要な事柄は，この Noether カレントから得られる保存電荷

$$Q=\int d^3x\, j^{\mu=0}(x), \qquad dQ/dt=0, \tag{8}$$

が，実は，もとの無限小変換 (3) の生成子 (generator) になっている，ということである。すなわち，古典論の場合，Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}_{\mathrm{P}}$ を，量子論の場合，交換関係 $[\ ,\ ]$ を用いて，

$$\begin{aligned}&\text{古典論}：\{\varphi_i(x), Q\}_{\mathrm{P}}=G_i(\varphi(x)),\\ &\text{量子論}：[iQ, \varphi_i(x)]=G_i(\varphi(x)),\end{aligned} \tag{9}$$

が成立する。この (9) は，変換量 G_i が $\dot{\varphi}=\partial_0\varphi$ によらない場合は即座にわかるが，$\dot{\varphi}$ による場合でも，(量子論の演算子順序の問題を除いて) かなり一般的に証明できる。(演習問題 1.8 参照)

例として，並進不変性と Lorentz 不変性から従う Noether カレントを導こう。

エネルギー運動量テンソル　並進 $x^\rho \to x'^\rho=x^\rho-\epsilon^\rho$ の下で，場は

$$\varphi_i'(x')=\varphi_i(x) \tag{10}$$

と“変換”するが，(3) の形の変換に直すには，φ_i' と φ_i の同一座標値の点 x での変化 (Lie 微分：δ_{L}) を見なければならない。

$$\delta_{\mathrm{L}}\varphi_i(x)\equiv\varphi_i'(x)-\varphi_i(x)=\epsilon^\rho\,\partial_\rho\varphi_i(x). \tag{11}$$

また，Lagrangian 密度も，x をあらわに含まぬ限り，並進の下ではスカラーで，

$$\delta_{\mathrm{L}}\mathcal{L}=\mathcal{L}(\varphi_i'(x), \partial_\mu\varphi_i'(x))-\mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu\varphi_i(x))=\epsilon^\rho\,\partial_\rho\mathcal{L}. \tag{12}$$

したがって，ρ-方向の並進の場合の，(3), (4) で定義される $G_{\rho i}, X^\mu_\rho$ は，

$$G_{\rho i}(\varphi)=\partial_\rho\varphi_i, \qquad X^\mu_\rho(\varphi)=\delta^\mu_\rho\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) \tag{13}$$

であることが，(11), (12) から読み取れ，その Noether カレント $j_\rho{}^\mu$ は

$$j_\rho{}^\mu=(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi_i))\partial_\rho\varphi_i-\delta^\mu_\rho\mathcal{L}\equiv T_\rho{}^\mu \tag{14}$$

で与えられる。これはよく知られた正準エネルギー運動量テンソルである。

4次元角運動量テンソル密度 無限小 Lorentz 変換 $x^\rho \to x'^\rho = x^\rho + \epsilon^{\rho\sigma} x_\sigma$ の下での場の変換は，1-2 の (4),(9) より

$$\varphi'_i(x') = \left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma}\right)_i{}^j \varphi_j(x). \tag{15}$$

左辺を Taylor 展開して

$$\varphi'_i(x') = \left[1 + \frac{1}{2}\epsilon^{\rho\sigma}(x_\sigma \partial_\rho - x_\rho \partial_\sigma)\right]\varphi'_i(x), \tag{16}$$

を用い，再度，同一座標値点 x での変化に直すと，ϵ の 1 次までで

$$\delta_{\mathrm{L}} \varphi_i(x) = \varphi'_i(x) - \varphi_i(x) = -\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}[(S_{\rho\sigma})_i{}^j + L_{\rho\sigma}\delta_i{}^j]\varphi_j(x) \tag{17}$$

$$L_{\rho\sigma} = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \tag{18}$$

と求まる。また Lorentz 不変な理論では Lagrangian 密度はスカラーだから

$$\delta_{\mathrm{L}} \mathcal{L} = -\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma} \mathcal{L}. \tag{19}$$

(17),(19) から，$\rho\sigma$ 平面内の Lorentz 変換の場合の $G_{\rho\sigma i}, X_{\rho\sigma}{}^\mu$ は，

$$\begin{aligned} G_{\rho\sigma i}(\varphi) &= -i(S_{\rho\sigma})_i{}^j \varphi_j + (x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho)\varphi_i, \\ X_{\rho\sigma}{}^\mu(\varphi) &= (x_\rho \delta^\mu_\sigma - x_\sigma \delta^\mu_\rho)\mathcal{L}, \end{aligned} \tag{20}$$

と読み取れ，したがって，その Noether カレント $j_{\rho\sigma}{}^\mu$ は

$$j_{\rho\sigma}{}^\mu = x_\rho T_\sigma{}^\mu - x_\sigma T_\rho{}^\mu - i(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu \varphi_i))(S_{\rho\sigma})_i{}^j \varphi_j \equiv \mathcal{M}_{\rho\sigma}{}^\mu \tag{21}$$

で与えられる。$T_\rho{}^\mu$ は，(14) に現れた正準エネルギー運動量テンソルで，$\mathcal{M}_{\rho\sigma}{}^\mu$ は 4 次元角運動量テンソル密度と呼ばれる。

並進と Lorentz 変換全体のなす群は Poincaré (ポアンカレ) 群と呼ばれる。(14),(21) のカレントに対応する保存電荷は，もちろん，Poincaré 群の生成子 $P^\mu, M^{\mu\nu}$ を与える：

$$P_\rho = \int d^3x\ T_\rho{}^0, \qquad M_{\rho\sigma} = \int d^3x\ \mathcal{M}_{\rho\sigma}{}^0. \tag{22}$$

保存カレントの不定性 Noether の定理で与えられるカレント (6) は保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすように構成したものであるが，これは決して一意的ではない。実際 (6) のカレント ($j^\mu_{ネター}$ と記す) の代わりに，全く勝手な反対称テンソル $f^{\mu\nu}$ を持ってきて，

$$j^\mu = j^\mu_{ネター} + \partial_\nu f^{\mu\nu} \tag{23}$$

で新しいカレント j^μ を定義しても，明らかに保存則を満たす。

この不定性を逆用して，$f^{\mu\nu}$ を適当に選んでカレント j^μ がある種の望ましい性質を持つように"改善"できる場合がある。例えば，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}=g^{\mu\rho}T_\rho{}^\nu$ を対称テンソルにとるとか，dilatation 変換のカレントが $x^\rho T_\rho{}^\mu$ で与えられるよう $T^{\mu\nu}$ を"improve"するとか，がよく知られた例である†。

量子論で零質量粒子の存在する場合(例えば量子電磁気学)，この不定項 $f^{\mu\nu}$ の存在はさらに重要である。すなわち，そのようなとき，一般に $j^\mu_{\text{ネター}}(x)$ には零質量の1粒子状態の寄与が含まれており，遠方で充分速く落ちないため，電荷 $Q=\int d^3x\, j^{\mu=0}_{\text{ネター}}(x)$ は積分が発散し定義されない。こういう場合は，$\partial_\nu f^{\mu\nu}$ がちょうど $j^\mu_{\text{ネター}}$ の零質量1粒子状態を相殺するように選ばなければならない。そのようにつくったカレントのみが，well-defined な電荷 Q を与えることができるのである。この点については，後の **6-6** で詳しく述べよう。

古典系と量子系における対称性変換　ここで，古典場の変換則と量子場の変換則との関係を明らかにしておくのは無駄ではないだろう。例えば，Lorentz 変換を，**1-2** では古典場の理論として

$$\varphi_i(x)\longrightarrow\varphi_i'(x')=D(\Lambda)_i{}^j\varphi_j(x)\qquad(x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)\tag{24}$$

と定義した。一方，量子論において第一義的なものは，状態の変換である：系の状態 $|\Phi\rangle$ は Lorentz 変換の下で

$$|\Phi\rangle\longrightarrow|\Phi'\rangle=U(\Lambda)|\Phi\rangle\tag{25}$$

なるユニタリー変換を受ける。すなわち，ある慣性系の観測者 O にとって $|\Phi\rangle$ で記述される状態は，その系から Lorentz 変換 Λ でつながる別の慣性系の観測者 O′ には $|\Phi'\rangle$ で記述される。$|\Phi\rangle$ と $|\Phi'\rangle$ とがユニタリー変換 $U(\Lambda)$ でつながるのは，状態の確率＝ノルムが変化してはいけないからである。(このことは，それゆえ，Lorentz 変換に限らず任意の対称性変換に対して成り立たねばならない。) 古典論における場の量 $\varphi_i(x)$ に対応するのは，量子論では場の演算子 $\boldsymbol{\varphi}_i(x)$ の行列要素 $\langle\Phi_\alpha|\boldsymbol{\varphi}_i(x)|\Phi_\beta\rangle$ である。したがって，Lorentz 変換された古典場 $\varphi_i'(x')$ に対応するのは $\langle\Phi_\alpha'|\boldsymbol{\varphi}_i(x')|\Phi_\beta'\rangle$ であり，それゆえ，古典論の関係式(24)は，量子論では(25)により

$$D(\Lambda)_i{}^j\langle\Phi_\alpha|\boldsymbol{\varphi}_j(x)|\Phi_\beta\rangle=\langle\Phi_\alpha|U^{-1}(\Lambda)\boldsymbol{\varphi}_i(x')U(\Lambda)|\Phi_\beta\rangle\tag{26}$$

† 演習問題 1.4 参照。

を意味する。この式が任意の $\langle \boldsymbol{\Phi}_\alpha|, |\boldsymbol{\Phi}_\beta\rangle$ に対して成立せねばならないから，

$$U(\Lambda)\ \boldsymbol{\varphi}_i(x) U^{-1}(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)_i{}^j\ \boldsymbol{\varphi}_j(x') \tag{27}$$

が従う。特に，無限小 Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$ [抽象的 Lorentz 群の元としては $\hat{\Lambda} \simeq 1-(i/2)\epsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}$] の場合を考えると

$$U(\Lambda) \equiv \exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{M}_{\mu\nu}\right) \simeq 1-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{M}_{\mu\nu} \tag{28}$$

$$D(\Lambda)_i{}^j \equiv \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)\right]_i{}^j \simeq \left(1-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)_i{}^j \tag{29}$$

を代入して

$$[\boldsymbol{M}_{\mu\nu}, \boldsymbol{\varphi}_i(x)] = -(L_{\mu\nu}\,\boldsymbol{\varphi}_i(x) + (S_{\mu\nu})_i{}^j\,\boldsymbol{\varphi}_j(x)) \tag{30}$$

$$L_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \tag{31}$$

を得る。(28) で導入した $\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ は，状態空間 $\{|\boldsymbol{\Phi}\rangle\}$ に働く線形演算子で，Lorentz 変換の生成子 $\hat{M}_{\mu\nu}$ の一つの表現を与える。$S_{\mu\nu}$ は **1-2** (9) で与えた，場の添字 i に掛かる $\hat{M}_{\mu\nu}$ の表現行列であり，$L_{\mu\nu}$ は場の引数 x に掛かる $\hat{M}_{\mu\nu}$ の表現である。したがって，$\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ も $S_{\mu\nu}$ も $L_{\mu\nu}$ も，別々に，Lorentz 群の生成子の交換関係 **1-1** (28) を満たす。物理的には，$L_{\mu\nu}$ は"軌道部分"の（4 次元的）角運動量，$S_{\mu\nu}$ は "内部スピン" にほぼ対応し，$\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ は場の量子論の（状態空間にはたらく）全角運動量演算子である†。非常におもしろいことに，このように一見抽象的に導入された角運動量演算子 $\boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ は，実は，この節の Noether の定理で構成された (22) の $M_{\mu\nu}$ と，もし場 φ_i を量子化された場 $\boldsymbol{\varphi}_i$ に置き換えれば，一致するのである。このことは，Noether の電荷 $Q=\int d^3x\ j^{\mu=0}(x)$ が，量子論においては正準交換関係の意味で，もとの変換（の無限小形）の生成子となっている，という一般的性質 (9) の結果なのである。以後，量子論の演算子をいちいち $\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{M}_{\mu\nu}$ と書くのは面倒だから，誤解のおそれのない限り $\varphi_i, M_{\mu\nu}$ と記す。

全く同様の議論を並進変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ の場合にやれば，

$$U(a)\varphi_i(x)U^{-1}(a) = \varphi_i(x+a), \tag{32}$$

$$U(a) \equiv \exp(ia^\mu P_\mu) \simeq 1 + ia^\mu P_\mu \qquad (a \ll 1) \tag{33}$$

$$i[P_\mu, \varphi_i(x)] = \partial_\mu\varphi_i(x), \tag{34}$$

---

† (30) の交換関係の右辺が $-(L_{\mu\nu}+S_{\mu\nu})\boldsymbol{\varphi}$ のようにマイナスになっているのは，次節で見るように，場 $\boldsymbol{\varphi}$ は正エネルギー解部分が消滅演算子になっていて，全角運動量 $L_{\mu\nu}+S_{\mu\nu}$ を運ぶ量子を消すからである。

が従う。

座標 x^μ が変換を受けない内部対称性の場合も全く同様である。古典論において，$\varphi_i(x) \to \varphi_i'(x) = D(g)_i{}^j \varphi_j(x)$ で与えられる変換の，量子論での対応する式は

$$U(g)\varphi_i(x)U^{-1}(g) = D^{-1}(g)_i{}^j\,\varphi_j(x) \tag{35}$$

となる。内部対称性の群 G の元 g が無限小変換のとき†

$$g = \exp\left(i\sum_a \theta^a X^a\right) \simeq 1 + i\sum_a \theta^a X^a \qquad (\theta^a \ll 1), \tag{36}$$

$$U(g) \equiv \exp\left(-i\sum_a \theta^a Q^a\right) \simeq 1 - i\sum_a \theta^a Q^a, \tag{37}$$

$$D(g)_i{}^j \equiv \left[\exp\left(i\sum_a \theta^a T^a\right)\right]_i{}^j \simeq \delta_i^j + i\sum_a \theta^a (T^a)_i{}^j, \tag{38}$$

と，それぞれを書けば，(35) は次式を導く：

$$[Q^a, \varphi_i(x)] = (T^a)_i{}^j\,\varphi_j(x). \tag{39}$$

この場合も，$-Q^a$ (負号に注意) は量子論の状態空間における，生成子 X^a の表現演算子であり，T^a は場の添字にはたらく X^a の表現行列である。

1-4 スカラー場の作用積分

前節で，一般の場 $\varphi_i(x)$ の作用積分 $S[\varphi]$ を

$$S[\varphi] = \int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu\varphi_i(x)) \tag{1}$$

なる形に書いたが，これは既に $S[\varphi]$ に対して次の要請を置いていることに注意したい。

1) 局所性： $S[\varphi]$ が(1)のように，1点 x の上の局所的な Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ の積分で与えられる。これは相互作用が直接的には無限小近傍にしか存在しないとする局所相互作用の仮定である。

我々は，$S[\varphi]$ にさらに次のような要請を課す。

2) $\mathcal{L}$ は実 (または hermite)： これは古典論ではエネルギーが実数であること，量子論では時間発展がユニタリー，すなわち，確率が保存すること，を要求することと同じ。

3) $\mathcal{L}$ は φ と $\partial_\mu\varphi$ の関数で，$\partial_0\varphi$ については高々 2 次： 運動方程式の段階で時間について 2 階微分までしかないという Newton 以来の仮定。

---

† X^a は群 G の無限小変換の生成子である。例えば $G=O(3)$ の内部対称性の場合は，通常の 3 次元空間の，1,2,3 軸まわりの回転の生成子 J_1, J_2, J_3 に対応するものである。(5-1 参照)

量子論では，より高階微分の方程式になると，必ず，i) 負の確率を導く負計量の粒子，または，ii) 光速以上で伝播する (したがって因果律を破る) タキオン (tachyon) の困難が生ずる。

4) Poincaré 不変性, 内部対称性, 等:　Lorentz 不変性は $\mathcal{L}$ が Lorentz 変換の下でスカラーであること，並進不変性は $\mathcal{L}$ があらわには x^μ に依存しないことを要求する。その他，アイソスピン対称性等の種々な内部対称性，空間反転 $\mathcal{P}$ や時間反転 $\mathcal{T}$ などの離散対称性，を場合に応じて要求する。

5) くりこみ可能性:　ずっと後の章で明らかになることだが, 理論のくりこみ可能性を要求すると，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ の次元が 4 以下 [n 次元時空 (空間 $n-1$ 次元・時間 1 次元) における理論の場合は，n 以下] でなければならない。

以上のような一般的要請を置くことにして，この節ではまずスカラー場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ の形を見てみよう。

中性スカラー場　最初に，実スカラー場 $\phi(x)$ が唯 1 種のみある系を考えよう。上の要請の 1) ～ 4) を満たす，この場合の最も一般的な $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L}=+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-V(\phi) \qquad (2)$$

で与えられる†。第 1 項を運動項 (kinetic term)，第 2 項 $V(\phi)$ をポテンシャル項と呼ぶ。運動項が正符号で入っているのは，エネルギー (量子論では粒子の計量) を正にするためである。$V(\phi)$ の形は，ϕ のべきで展開したとき, 定数項はエネルギーの原点をずらすだけだから普通気にせず, ϕ の 1 次の項は，$\phi(x)\to\phi(x)+a$ (定数) という形の場の再定義で常に消去できるから，一般に ϕ の 2 次から始まると考えてよい。

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\mu^2\phi^2+\frac{1}{3!}g\phi^3+\frac{1}{4!}\lambda\phi^4+\cdots. \qquad (3)$$

くりこみ可能性の要求 5) に関係して, ここで**次元**の話をしなければならない。この本では自然単位 $c=\hbar=1$ を採用している:

$$c=[L/T]=1, \qquad \hbar=[E\cdot T]=1. \qquad (4)$$

それゆえ，長さ L と時間 T は同じ次元，エネルギー E は T^{-1} の次元である。質量 M の次元は，Einstein の関係式 $E=Mc^2=M$ よりエネルギーの

† 運動項が $(1/2)g^2(\phi)\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ の形の方がより一般的に見えるが，これも，$g(x)$ の原始関数 $G(x)$ を使って $\Phi=G(\phi)$ で場を定義し直すと，上の $(1/2)\partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\Phi$ の形に帰着する。

次元に等しく，よってすべての量の次元を，質量 M の何乗の次元かで表すことができ，これを質量次元と呼ぶ：

$$[T]=[L]=[M^{-1}], \qquad [E]=[M]. \tag{5}$$

すなわち，長さと時間は共に質量次元 -1，エネルギーは $+1$，速度や作用は 0，である。以後，単に次元と言えば質量次元のことである。

作用の次元は 0 であるから，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ の次元は，n 次元時空体積要素 $d^n x$ の逆数の次元，n である。したがって，運動項 $(\partial_\mu \phi)^2$ の次元の勘定から，スカラー場の次元が

$$\dim[\phi]=(n-2)/2 \tag{6}$$

だとわかる。特に，我々の $n=4$ 次元時空では $+1$，$n=2$ の場合は 0 である。

くりこみ可能性を要求すると，$\dim[\mathcal{L}]\leqq n$ でなければならないから，ポテンシャル項 $V(\phi)$ は，$n=4$ のときは ϕ の 4 次まで，$n=6$ のときは ϕ^3 までしか許されない。2 次元時空は特別で，ϕ の次元が 0 で，$V(\phi)$ は任意の関数が許される。

4 次元時空の場合，さらに離散的変換 $\phi\to-\phi$ に対する不変性を要求して，ポテンシャル項を

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\mu^2\phi^2+\frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{7}$$

ととることが多い。これは $\lambda\phi^4$ 理論と呼ばれ，場の理論の最も簡単な模型を与える。この系の Euler-Lagrange 方程式は

$$(\Box+\mu^2)\phi=-\lambda\phi^3/3!. \qquad (\Box\equiv\partial^\mu\partial_\mu) \tag{8}$$

量子論へいくと μ は，この場の粒子の質量となることがわかるので，(7) の右辺第 1 項を質量項，第 2 項を相互作用項と呼ぶ。

複素スカラー場　複素スカラー場 ($\varphi(x)$ と記す) の場合も，同様に，

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\varphi^*\,\partial^\mu\varphi-\mu^2\,\varphi^*\varphi-\frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2 \tag{9}$$

で与えられるような $\lambda\phi^4$ 模型を考えることができる。この系が上の実スカラー場の場合に比べて特徴的な点は，次の $U(1)$ 位相変換†

$$\begin{cases}\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x)=e^{i\theta}\varphi(x)\\ \varphi^*(x) \longrightarrow \varphi^{*\prime}(x)=e^{-i\theta}\varphi^*(x)\end{cases} \tag{10}$$

† (10) の位相変換は 1 次元 (1 パラメータ) のユニタリー変換であるので，1 次元ユニタリー群 $U(1)$ の群構造を持つ。

の下で，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が不変であるということである。これは連続変換であるから，Noether の定理により保存カレントが存在する。(10) の無限小形

$$\delta\varphi(x)\equiv\varphi'(x)-\varphi(x)=i\theta\varphi(x),\qquad \delta\varphi^*(x)=-i\theta\varphi^*(x),\tag{11}$$

および，$\delta\mathcal{L}=0$ より，**1-3** (6) の Noether カレントは

$$\begin{aligned} j^\mu(x)&=(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi))i\varphi+(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi^*))(-i\varphi^*)\\ &=-i\varphi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\varphi\qquad (f\overleftrightarrow{\partial_\mu}g\equiv f\partial_\mu g-\partial_\mu f\cdot g)\end{aligned}\tag{12}$$

と求まる。これに対応する電荷

$$Q=\int d^3x\ j^0(x)=\int d^3x\ i(\dot{\varphi}^*\varphi-\varphi^*\dot{\varphi})\tag{13}$$

は，前節で述べたように，例えば量子論で，

$$\begin{aligned}&[iQ,\varphi(x)]=i\varphi(x)\\ &[iQ,\varphi^*(x)]=-i\varphi^*(x)\end{aligned}\tag{14}$$

の交換関係を満たし，もとの (11) の変換の生成子となっている，ということが，この場合，後の正準量子化の手続きですぐさま確かめられる。

(14) から，複素スカラー場に対応する粒子は電荷を持つことがいえる。実際，$|*\rangle$ を電荷 Q の固有値 q の状態，$Q|*\rangle=q|*\rangle$，とすれば，

$$Q\varphi(x)|*\rangle=([Q,\varphi(x)]+\varphi(x)Q)|*\rangle=(q+1)\varphi(x)|*\rangle\tag{15}$$

などが (14) から従い，$\varphi(x)$ は $Q=+1$，$\varphi^*(x)$ は $Q=-1$，の電荷を持つ量子をつくる演算子であることがわかる。これに対し，上の実スカラー場 ϕ に対しては，(10) のような位相変換は定義できず，したがって電荷を持たない中性粒子を記述する。

$O(N)$-$\lambda\phi^4$ 模型　スカラー場が多成分になると，より大きな内部対称性が考えられる。その例として N 種の実スカラー場 $\phi_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ の

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\partial_\mu\phi_i\,\partial^\mu\phi_i-\mu^2\phi_i\,\phi_i)-\frac{\lambda}{8}(\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\phi_i)^2\tag{16}$$

のような Lagrangian 密度を考えよう。これは $O(N)$-$\lambda\phi^4$ 模型と呼ばれ，$1/N$ 展開などでよく議論される簡単な模型である。この系は，$(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)^T$ を N 次元内部空間におけるベクトルと考え，それを回転する任意の変換に対して不変である。すなわち，N 次元直交変換群 $O(N)$ の下での不変性を持っている。したがって Noether カレントあるいは保存電荷も，$O(N)$ の生成子の個数 $N(N-1)/2$ だけ存在する (演習問題 1.5)。

先の複素スカラー場の模型は，実は，

$$\varphi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}, \qquad \varphi^*=(\phi_1-i\phi_2)/\sqrt{2}, \tag{17}$$

と書けば，この場合の $N=2$ の $O(2)$-$\lambda\phi^4$ 模型と同じである。両者の対称性，$U(1)$ 群と $O(2)$ 群もむろん同じものである。

1-5　スピノール場の作用積分

$SL(2, \boldsymbol{C})$ の **2** 表現および **2*** 表現スピノール場に対し，それぞれ

$$\xi_\alpha(x), \quad \eta^{\dot{\alpha}}(x) \tag{1}$$

を，以後，スピノール添字の標準位置と解することにする。

運動項　まず運動項をつくることを考える。微分 ∂_μ は，1-2 で既に，混合スピノール添字 $(\alpha, \dot{\beta})$ を持つ量と等価であることを見た：

$$\partial_\mu \longleftrightarrow \partial_{\alpha\dot{\beta}}\equiv(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,\partial_\mu. \tag{2}$$

したがって，微分 ∂_μ を含む最も簡単な Lorentz スカラーは

$$\eta^{*\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,\partial_\mu\eta^{\dot{\beta}}\equiv\eta^\dagger\sigma^\mu\,\partial_\mu\eta \tag{3}$$

と，スピノールの足をすべてつぶ(縮約)して得られる。ここで，点付き・点なしスピノールの定義から，点付きスピノールの複素共役は，点なしスピノールの変換性を持つこと(あるいはその逆)，すなわち

$$(\eta^{\dot{\alpha}})^*=(\eta^*)^\alpha, \qquad (\xi_\alpha)^*=(\xi^*)_{\dot{\alpha}}, \tag{4}$$

の事実を使った。(3) を実にするため，その複素共役 $\partial_\mu\eta^\dagger\cdot\sigma^\mu\eta$ も要るが，足すと全微分 $\partial_\mu(\eta^\dagger\sigma^\mu\eta)$ になってしまうから，引くことにする；よって

$$\mathcal{L}_{\rm L}^k=\frac{i}{2}(\eta^\dagger\sigma^\mu\,\partial_\mu\eta-\partial_\mu\eta^\dagger\cdot\sigma^\mu\eta)=\frac{i}{2}\eta^\dagger\sigma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\eta \tag{5}$$

が，実の η の運動項である。全く同様に，ξ の運動項は

$$\mathcal{L}_{\rm R}^k=\frac{i}{2}\xi^*{}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\xi_\alpha=\frac{i}{2}\xi^\dagger\,\bar{\sigma}^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\xi \tag{6}$$

となる。

ξ と η を互いに独立な場とすれば，$\mathcal{L}_{\rm L}^k+\mathcal{L}_{\rm R}^k$ の系は

$$\begin{aligned}\xi'(x)&=e^{i\theta}\xi(x), & \xi^{*\prime}(x)&=e^{-i\theta}\xi^*(x),\\ \eta'(x)&=e^{i\theta'}\eta(x), & \eta^{*\prime}(x)&=e^{-i\theta'}\eta^*(x),\end{aligned} \tag{7}$$

なる，θ と θ' が独立な位相変換に対して不変であることに注意しておこう。ξ, η の変換は共に $U(1)$ 群だが，ξ の方を $U(1)_{\rm R}$，η の方を $U(1)_{\rm L}$ と記し，(7) の変換をカイラル $U(1)_{\rm L}\times U(1)_{\rm R}$ 変換と呼ぶ。この不変性があると，前節の複素スカラー場の場合と同様にして，二つの Noether カレントが存

在し，ξ の電荷≡粒子数 と η の電荷≡粒子数 が別々に保存することになる。

微分を 2 回使えば，スカラー場と同様，$\partial_\mu \xi^\dagger \cdot \partial^\mu \eta +$h.c. (h.c. は複素共役量を表す) のような Lorentz スカラーの運動項がつくれるが，このような ξ と η の混合した運動項は，量子論において，負計量の粒子が現れるという困難に導くので，採用しない。

今度も，(5),(6) の運動項の形から，スピノール場の次元が計算できる。n 次元時空で，$\dim[\mathcal{L}]=n$，$\dim[\partial_\mu]=1$ だから，

$$\dim[\xi]=\dim[\eta]=\frac{n-1}{2}, \tag{8}$$

特に $n=4$ 次元では，3/2 の次元を持つ。

質量項 微分を含まずにつくれる最低次の Lorentz スカラーは，

$$\eta^{\dot\alpha}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\eta^{\dot\beta}=\eta^T\epsilon\eta, \qquad \xi_\alpha\epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta=\xi^T\epsilon\xi \tag{9}$$

がまず思い付く。しかし，これらは 0 であるように見える。事実

$$\eta^{\dot\alpha}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\eta^{\dot\beta}=\eta^1\eta^2-\eta^2\eta^1 \tag{10}$$

などで，もし η や ξ が普通の数なら，0 である。しかし，実はスピノール場は，量子論では Fermi 統計に従う演算子であり，それに対応する“古典論”を考える際には，反可換な数，いわゆる Grassmann 数として扱わなければならないことが知られている。Grassmann 数とは，お互いにすべて(自分自身とも) **反交換**する“数”，というのが定義である。したがって，η を Grassmann 数と考えると $\eta^2\eta^1=-\eta^1\eta^2$ と負号が出るから，(10) は $2\eta^1\eta^2$ になり 0 とはならない。これ以後，スピノール場を“古典論”の範囲内で考えるときは一貫して Grassmann 数として扱い，符号に気を付けることにする。

というわけで，(9) を含む実の量として，Lagrangian 密度†

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{L}}^m&=-\frac{1}{2}(m_{\mathrm{L}}\eta^T\epsilon\eta-m_{\mathrm{L}}^*\eta^\dagger\epsilon\eta^*)\\ \mathcal{L}_{\mathrm{R}}^m&=-\frac{1}{2}(m_{\mathrm{R}}\xi^\dagger\epsilon\xi^*-m_{\mathrm{R}}^*\xi^T\epsilon\xi)\end{aligned} \tag{11}$$

がつくれる。これらは，それぞれ，η と ξ の Majorana (マヨラナ) 質量項と呼ばれるものである。しかし (11) は，上述の (7) の変換の下でのカイラル

† $\epsilon^\dagger=\epsilon^T=-\epsilon$ に注意。また，二つの Grassmann 数 θ,χ の積の複素 (hermite) 共役は，$(\theta\chi)^*=\chi^*\theta^*$ の規則に従う。(4-4 参照)

$U(1)_L\times U(1)_R$ 対称性をそれぞれ壊していることに注意しておこう。それゆえ，この質量項があると粒子数が保存しない。

一方，ξ-η の遷移を許せば，(9) 以外にも同じ次数の Lorentz スカラー $\xi^*{}_{\dot{\alpha}}\eta^{\dot{\alpha}}\equiv\xi^\dagger\eta$ がつくれ，したがって，次の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_D^m=-(m\xi^\dagger\eta+m^*\eta^\dagger\xi) \tag{12}$$

が可能である。これを Dirac (ディラック) 質量項と呼ぶ。この Dirac 質量項も (7) のカイラル $U(1)_L\times U(1)_R$ 対称性を壊すが，Majorana 質量項と異なり，すべてを壊すわけではない。(7) で $\theta=\theta'$ とした変換

$$\begin{pmatrix}\xi'(x)\\ \eta'(x)\end{pmatrix}=e^{i\theta}\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta(x)\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\xi^{*\prime}(x)\\ \eta^{*\prime}(x)\end{pmatrix}=e^{-i\theta}\begin{pmatrix}\xi^*(x)\\ \eta^*(x)\end{pmatrix} \tag{13}$$

については不変性を保っている。この $U(1)$ 部分群を $U(1)_{対角}$ または $U(1)_V$ と呼ぶ。それゆえ，Dirac 質量項のある粒子の場合，(13) の不変性に対応する保存量 Q が一つあって，ξ と η は $Q=+1$，ξ^* と η^* は $Q=-1$ の電荷 (または粒子数) をそれぞれ持つことになる。

(11) と (12) では，質量パラメータ m_R, m_L, m をすべて複素数としたが，ξ と η の場の位相の再定義で，3 パラメータのうち任意の二つを実で正に取ることができる。

Dirac スピノール：4 成分表示　零質量，または Majorana 質量項 (11) のみを持つ粒子の場合は，スピノール場 ξ_α と $\eta^{\dot{\alpha}}$ が Lagrangian 密度 (5), (6), (11) の各項で混じっていないので，$\xi_\alpha(x)$ または $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ のどちらか一方だけで記述される。ところが，Dirac 質量項 (12) を持つ粒子——Dirac 粒子——の場合は，ξ_α と $\eta^{\dot{\alpha}}$ の組で記述されるので，これを縦に並べた 4 成分量

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\xi_\alpha(x)\\ \eta^{\dot{\alpha}}(x)\end{pmatrix} \tag{14}$$

を定義するのが便利である。この量 (14) を Dirac スピノールと称する。

これに対応して，**1-2** で導入した 4 次元 Pauli 行列 σ^μ, $\bar{\sigma}^\mu$ を 2 階建てにし，次の Dirac の 4×4 γ 行列を定義する。

$$\gamma^\mu\equiv\begin{pmatrix}0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0\end{pmatrix} \tag{15}$$

(スピノール添字が標準位置であることに注意。)　すなわち，

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

γ 行列の最も基本的な性質は，**1-2** (34) から従う

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\equiv\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{17}$$

である。**1-2** (45) に対応したテンソルは†

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]=\begin{pmatrix}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta & 0\\ 0 & (\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}. \tag{18}$$

また，γ_5 行列と呼ばれる次の行列を定義しておこう。

$$\gamma_5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}. \tag{19}$$

(15)～(19) の γ 行列の，2×2 行列による表示は，Dirac 場 ψ を ξ,η から (14) のように構成して得られるもので，スピノール表示 (またはカイラル表示) と呼ばれる。Dirac 粒子の非相対論的極限を議論する際には，この表示より，むしろ $(\xi+\eta)/\sqrt{2}$ を ψ の上 2 成分，$(\xi-\eta)/\sqrt{2}$ を下 2 成分にする表示の方が便利である。後者を標準表示 (または Dirac 表示) と呼ぶ。付録 A には，スピノール表示，標準表示の両方での γ 行列の表式をまとめておいた。

さてこの 4 成分表示では，運動項 (5)+(6) は

$$\mathcal{L}^k=\frac{i}{2}\bar\psi\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\psi, \tag{20}$$

Dirac 質量項 (12) は ($m=m^*$ として)

$$\mathcal{L}_{\rm D}^m=-m\bar\psi\psi, \tag{21}$$

と書ける。ここに $\bar\psi$ は $\psi^\dagger\gamma_0$ のことで Dirac 共役と呼ぶ。(19) に見るように，もとの 2 成分スピノール $\xi_\alpha,\eta^{\dot\alpha}$ は，それぞれ γ_5 の固有値が $+1$，-1 の固有状態に対応している。γ_5 の固有値は，しばしばカイラリティー (chirality) と呼ばれる。Dirac スピノール ψ の，カイラリティーが ±1 の成分への分解は，明らかに射影演算子 $(1\pm\gamma_5)/2$ で行われる：

$$\psi_{\rm R}\equiv\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi=\begin{pmatrix}\xi_\alpha\\0\end{pmatrix},\qquad \psi_{\rm L}\equiv\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi=\begin{pmatrix}0\\\eta^{\dot\alpha}\end{pmatrix}. \tag{22}$$

$\psi_{\rm R},\psi_{\rm L}$ はそれぞれ ψ の右手型 (right-handed) 成分，左手型 (left-handed) 成分と呼ばれ，2 成分スピノール場 $\xi_\alpha,\eta^{\dot\alpha}$ と等価である。

(18) で与えた 4×4 行列 $\sigma^{\mu\nu}$ の 1/2 は，**1-2** の (52), (53) により，ちょうど Dirac スピノール ψ 上での Lorentz 生成子 $\hat M^{\mu\nu}$ の表現となっていることがわかる。すなわち

$$\psi'(x')=\exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi(x)\equiv A\psi(x) \tag{23}$$

† 4×4 行列 $(i/2)[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ を慣例に従い $\sigma^{\mu\nu}$ と記したが，2×2 行列 $(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta$ と混同しないよう。

が，Dirac スピノールの有限 Lorentz 変換を与える。この行列 A は，1-2 (35),(40),(41) を用いれば，

$$\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \qquad \bar{A} \equiv \gamma_0 A^\dagger \gamma_0 \tag{24}$$

を満たすことが容易にわかる。また，(23)，(24) から

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma_5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, \quad \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi, \tag{25}$$

が，それぞれ，スカラー，擬スカラー，ベクトル，軸性ベクトル，テンソル，の Lorentz 変換性を示すことも明らかであろう。

(7) のカイラル $U(1)_L \times U(1)_R$ 変換は，4 成分表示では，しばしば，ξ と η の共通位相の変換 (13) と，逆位相の変換

$$\begin{cases} \xi'(x) = e^{i\theta}\xi(x) \\ \eta'(x) = e^{-i\theta}\eta(x) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \xi^{*\prime}(x) = e^{-i\theta}\xi^*(x) \\ \eta^{*\prime}(x) = e^{i\theta}\eta^*(x) \end{cases}, \tag{26}$$

とに組み直し，前者 (13) を

$$\psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x), \qquad \psi^{*\prime}(x) = e^{-i\theta}\psi^*(x) \tag{27}$$

後者 (26) を

$$\psi'(x) = e^{i\gamma_5\theta}\psi(x), \qquad \psi^{*\prime}(x) = e^{-i\gamma_5\theta}\psi^*(x) \tag{28}$$

と表現する。単にカイラル変換といえば，この γ_5 変換(28)を指すことが多い。運動項 (20) のみの場合，$U(1)_V$ 変換 (27) も，カイラル変換 (28) も，系を不変に保ち，前者に対応する Noether カレントは，ベクトル・カレント

$$j^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{29}$$

後者に対応するのは軸性ベクトル・カレント

$$j_5^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \tag{30}$$

であることがわかる。

荷電共役変換 C　(13) のところで述べたように，$U(1)_V$ 位相変換 (13) (または (27)) の下での不変性に対応して保存電荷 Q (もしくは，粒子数) があり，$\psi = (\xi, \eta)^T$ は $Q = +1$ を，$\psi^* = (\xi^*, \eta^*)^T$ は $Q = -1$ を運ぶ。電荷 $Q = +1$ を持つ "粒子" ψ を，電荷 $Q = -1$ を持つ "反粒子" ψ^* に，逆に ψ^* を ψ に，それぞれ変換する変換 C を荷電共役変換 (charge conjugation) (または粒子・反粒子変換) と呼ぶ。この C 変換は，基本的には複素共役変換 $\psi \rightleftarrows \psi^*$ でよいのだが，粒子・反粒子を入れ替えるだけの純粋な内部変換であるから，Lorentz 変換性を保つものでなければならない。しかるに，複素共役をとると，点なしスピノール ξ_α は点付き $(\xi_\alpha)^* = \xi^*{}_{\dot{\alpha}}$ に，点付き $\eta^{\dot{\alpha}}$ は点なし $(\eta^{\dot{\alpha}})^* = \eta^{*\alpha}$ に，変換性を変えてしまう。したがって，Lorentz 変換性を保つために，複素共役と同時に ξ 成分と η 成分の交換 (およびスピ

ノール添字の上げ下げの調整) を行うことが必要で，結局，

$$\psi=\begin{pmatrix}\xi_\alpha\\ \eta^{\dot\alpha}\end{pmatrix}\xrightarrow{C}\psi^C=\begin{pmatrix}\eta^{*\beta}\epsilon_{\beta\alpha}\\ \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\xi^*{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}=i\gamma^2\psi^*\equiv C\bar\psi^T \tag{31}$$

とすべきことがわかる。ここで 4×4 行列 C は荷電共役行列と呼ばれ，

$$C=i\gamma^2\gamma^0=-C^{-1}=-C^\dagger \tag{32}$$

で与えられる。C の基本的な性質は，この式および (16),(17) より従う

$$C^{-1}\gamma^\mu C=-\gamma^{\mu T} \tag{33}$$

の式である。Dirac 場の Lagrangian 密度 (20)+(21) は C 変換 (31) で不変である。

Majorana スピノール　2 成分場 $\eta^{\dot\alpha}$ のみが存在し，Majorana 質量項を持つ場合，Lagrangian 密度は，(5) と (11) で見たように (m を実にとり)

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}\eta^\dagger\sigma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\eta-\frac{m}{2}(\eta^T\epsilon\eta-\eta^\dagger\epsilon\eta^*) \tag{34}$$

で与えられる。ところが，この系は 2 成分場 $\eta^{\dot\alpha}$ のみにもかかわらず，Dirac 場 ψ と同様に 4 成分表示ができるのである。すなわち，η より

$$\psi_M\equiv\begin{pmatrix}\eta^{*\beta}\epsilon_{\beta\alpha}\\ \eta^{\dot\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\sigma_2\eta^*\\ \eta\end{pmatrix} \tag{35}$$

なる 4 成分場を定義すれば，Dirac 場と同じ，上 2 成分は点なしスピノールの，下 2 成分は点付きの，正しい変換をする量となる。しかし，むろん，独立な成分は η の複素 2 成分のみである，ということの反映として，この 4 成分場 ψ_M は定義 (35) より，荷電共役変換 C の下で自己共役である：

$$\psi_M^C=\psi_M, \tag{36}$$

すなわち，荷電共役の意味で実 Dirac 場である。このような自己荷電共役な場を Majorana 場と呼ぶ。(34) の Lagrangian 密度は，ψ_M を使って

$$\mathcal{L}=\frac{i}{4}\bar\psi_M\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_M-\frac{1}{2}m\bar\psi_M\psi_M \tag{37}$$

と形式上 Dirac 場と同じ形に書ける。ただ ψ_M は自己荷電共役だから，反粒子が粒子自身と同じ中性な粒子に対応している。

ξ_α のみでも同様に，(36) を満たす Majorana 場をつくれる：

$$\psi_M=\begin{pmatrix}\xi_\alpha\\ \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\xi^*{}_{\dot\beta}\end{pmatrix} \tag{38}$$

相互作用系の例　スピノール場のみで相互作用している系の例としては，例えば，Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\bar{\psi}i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi+G[(\bar{\psi}\psi)^2+(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2] \tag{39}$$

を持つものがある。これは，(27) の $U(1)_V$ 変換のみならず，(28) のカイラル変換に対する不変性も持つ系で，南部と Jona-Lasinio (ヨナ・ラシーニョ) により初めて，ダイナミカルな質量生成＝カイラル対称性の自発的破れ，という重要な概念を明らかにする際に用いられた模型である。しかし，この系は，4 次元時空では相互作用項が次元 6 を持つのでくりこみ可能でない。2 次元時空では，スピノール場の次元が (8) より 1/2 で，相互作用項の次元が 2 で，ちょうどくりこみ可能となる。2 次元での南部-Jona-Lasinio 模型のことを，Gross-Neveu 模型と呼ぶ。

4 次元でくりこみ可能な例として，スピノール場とスカラー場の相互作用系であるいわゆる線形 σ 模型をあげておこう：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\frac{1}{2}\bar{\psi}i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi+\frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2+(\partial_\mu\pi)^2-\mu^2(\sigma^2+\pi^2)]\\&-g[\bar{\psi}\psi\sigma+\bar{\psi}i\gamma_5\psi\pi]-\frac{\lambda}{8}(\sigma^2+\pi^2)^2\end{aligned} \tag{40}$$

この系は，(39) と同様カイラル不変性を持っている。実際 (28) のスピノール場のカイラル変換 $\psi\rightarrow e^{i\gamma_5\theta}\psi$ の下で，$\bar{\psi}\psi$ および $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$ は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &\longrightarrow \bar{\psi}e^{2i\gamma_5\theta}\psi=\bar{\psi}\psi\cos 2\theta+\bar{\psi}i\gamma_5\psi\sin 2\theta\\ \bar{\psi}i\gamma_5\psi &\longrightarrow \bar{\psi}i\gamma_5 e^{2i\gamma_5\theta}\psi=-\bar{\psi}\psi\sin 2\theta+\bar{\psi}i\gamma_5\psi\cos 2\theta\end{aligned} \tag{41}$$

の変換をするから，スカラー場 $\sigma(x)$ および擬スカラー場 $\pi(x)$ も

$$\begin{aligned}\sigma &\longrightarrow \sigma'=\sigma\cos 2\theta+\pi\sin 2\theta\\ \pi &\longrightarrow \pi'=-\sigma\sin 2\theta+\pi\cos 2\theta\end{aligned} \tag{42}$$

の角度 2θ の $O(2)$ 回転をするものとしてカイラル変換を定義しておけば，(40) の Lagrangian 密度は不変である。(40) の相互作用項 $\bar{\psi}\psi\sigma$ や $\bar{\psi}i\gamma_5\psi\pi$ は湯川型相互作用と呼ばれ，一方 (39) の相互作用項は，Fermi 型あるいは 4 Fermi 相互作用と呼ばれる。

カイラル不変性の要求が，(39) や (40) でスピノール場の質量項 $m\bar{\psi}\psi$ を禁止しており，そのため摂動論的には ψ は零質量粒子となる。しかし相互作用の効果が大きくなると，例えばスカラー場 $\sigma(x)$ が 0 でない真空期待値 $\langle\sigma\rangle\neq 0$ を持つようになり，(40) で質量項 $g\langle\sigma\rangle\bar{\psi}\psi$ が生じ ψ がダイナミカルに質量 $m=g\langle\sigma\rangle$ を持つことが可能になる。このような現象はカイラル対称性の自発的破れと呼ばれ，後の 6 章で詳しく述べる。

1-6　$U(1)$ ゲージ場：電磁場

ベクトル場は，場の理論においてくりこみ可能性を要求すると，常にゲージ場と呼ばれる特殊な性格を帯びた場としてのみ導入され得る，ということが知られている。Yang (ヤン)-Mills (ミルズ) 場と呼ばれる一般的な非可換群に基づくゲージ場は，この教科書の主題でもあり，後の章に詳しく述べることにするが，ここでは，最も簡単な例として，我々のよく知っている 光の場＝電磁場 を $U(1)$ 群に基づくゲージ場という観点から扱う。

局所ゲージ変換　複素スカラー場や Dirac 場の Lagrangian 密度†

$$\mathcal{L}_{\text{スカラー}}=\partial_\mu\varphi^*\,\partial^\mu\varphi-\mu^2\,\varphi^*\varphi-(\lambda/2)(\varphi^*\varphi)^2, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\,\partial_\mu-m)\psi \tag{2}$$

は，**1-4, 1-5** で述べたように $U(1)$ 群をなす位相変換

$$\begin{cases}\varphi'(x)=e^{i\theta}\varphi(x)\\ \varphi^{*\prime}(x)=e^{-i\theta}\varphi^*(x)\end{cases},\qquad \begin{cases}\psi'(x)=e^{i\theta}\psi(x)\\ \bar{\psi}'(x)=e^{-i\theta}\bar{\psi}(x)\end{cases} \tag{3}$$

の下で不変であった。(以後複素共役の $\varphi^*, \bar{\psi}$ に対する式を省略。)　ところが，この変換の位相パラメータ θ は全く x^μ に依存しない定数であり，それは，これらの複素場の位相を全宇宙，無限の過去から未来まで，一斉にまわすことを意味している。このような大局的変換は不自然で，むしろ，位相パラメータ θ が全く任意の x-依存性を持つ局所的位相変換

$$\varphi'(x)=e^{i\theta(x)}\varphi(x),\qquad \psi'(x)=e^{i\theta(x)}\psi(x) \tag{4}$$

の方が自然であると考え，その下での不変性を理論は先験的に持つべきである，と要求するのが**ゲージ原理**の立場である。位相変換というのは，複素数を記述する座標軸 (実軸・虚軸) の回転であるから，このゲージ原理の要請は，言い換えれば，場の値＝複素数 を測る座標軸の設定が時空の各点各点で独立に行えるべきである，と考えるのに等しい。

しかし θ が x に依存するようになると，微分を含む運動項はもはや不変ではなくなる：すなわち，場の微分 $\partial_\mu\varphi(x)$ の変換には，

$$\begin{aligned}\partial_\mu\varphi(x)\longrightarrow\partial_\mu\varphi'(x)&=\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\varphi(x))\\ &=i(\partial_\mu\theta(x))e^{i\theta(x)}\varphi(x)+e^{i\theta(x)}\partial_\mu\varphi(x)\end{aligned} \tag{5}$$

† Dirac 場の Lagrangian 密度は，**1-5** の (20)＋(21) で与えられるが，ここの (2) の形は簡便のためそれを部分積分したものである。

のように，$\partial_\mu\theta(x)$ の項が現れ，大局的変換の場合のような斉次の変換 $\partial_\mu\varphi \to e^{i\theta}\partial_\mu\varphi$ にならないからである。このような斉次の変換をする量をつくる微分を共変微分と呼び，その際，ゲージ場（ベクトル場，$A_\mu(x)$ と書く）の導入が必要となるのである。すなわち，共変微分 D_μ を

$$D_\mu\varphi(x) \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu(x))\varphi(x) \tag{6}$$

で定義し，ゲージ場の変換を

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{7}$$

とする。そうすれば，実際，共変微分 (6) の変換は

$$\begin{aligned}(D_\mu\varphi(x))' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu(x))\varphi'(x) \\ &= i(\partial_\mu\theta(x))e^{i\theta(x)}\varphi(x) + e^{i\theta(x)}\partial_\mu\varphi(x) \\ &\qquad - i(eA_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x))e^{i\theta(x)}\varphi(x) \\ &= e^{i\theta(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\varphi(x) \\ &= e^{i\theta(x)}D_\mu\varphi(x)\end{aligned} \tag{8}$$

と，斉次の位相変換となる。位相変換が $\Phi'(x) = e^{iq\theta(x)}\Phi(x)$ となる（電荷 $Q=q$ の）場 $\Phi(x)$ の場合の共変微分は，むろん，$(D_\mu\Phi(x))' = e^{iq\theta(x)}D_\mu\Phi(x)$ となるよう

$$D_\mu\Phi(x) \equiv (\partial_\mu - iqeA_\mu(x))\Phi(x) \tag{9}$$

と定義する。したがって，特に $D_\mu\varphi^*(x) = (D_\mu\varphi(x))^*$ となる。φ や ψ の“物質場”の局所位相変換 (4) とゲージ場の変換 (7) とを合わせて局所（$U(1)$）ゲージ変換，あるいは単にゲージ変換と呼ぶ。

共変微分は，したがって，大局的変換の場合と同じ斉次位相変換となるので，大局的位相変換で不変な Lagrangian は，その中の微分 ∂_μ を共変微分 D_μ に置き換えさえすれば，局所ゲージ不変な Lagrangian となる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{スカラー}} &= (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - \mu^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2 \\ &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^* \cdot (\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2\end{aligned} \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi \tag{11}$$

すなわち，ゲージ原理の要請により，ゲージ場 $A_\mu(x)$ と物質場 φ や ψ との相互作用の仕方が決まったのである。

ゲージ場自身の運動項もゲージ不変性の要求で決まる。ゲージ場の 1 階微分を含み，ゲージ変換 (7) で不変な量は明らかに

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{12}$$

で，場の強さ (field strength) と呼ばれる。したがってゲージ場の運動項は

$$\mathcal{L}_{ゲージ場}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{13}$$

で与えられる。

特に，Dirac 場 ψ が電子，ゲージ場 A_μ が電磁場のとき，(11)+(13) の

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{14}$$

で記述される系の量子力学は，量子電磁気学 (quantum electrodynamics)，略して QED と呼ばれる。

演習問題 1.

1.1　スカラー場 $\phi(x)$ に対して，Poincaré 変換 (並進と Lorentz 変換) は

$$\phi(x)\longrightarrow\phi'(x')=\phi(x)\,; \qquad x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu+a^\mu$$

で与えられる。変換が無限小，$\Lambda^\mu{}_\nu\simeq\delta^\mu_\nu+\epsilon^\mu{}_\nu$，$\epsilon^\mu{}_\nu\ll 1, a^\mu\ll 1$，であるとき，スカラー場の変化 $\delta\phi(x)\equiv\phi'(x)-\phi(x)$ を

$$\delta\phi(x)=i\left(a^\mu P_\mu-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)\phi(x)+O(\epsilon^2, a\epsilon, a^2),$$

の形に書けば，$P_\mu, M_{\mu\nu}$ は次の演算子で与えられることを示せ：

$$P_\mu\equiv i\partial_\mu, \qquad M_{\mu\nu}\equiv i(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)$$

この $P_\mu, M_{\mu\nu}$ は，Poincaré 群の生成子 $\hat{P}_\mu, \hat{M}_{\mu\nu}$ のスカラー場の上での表現であるが，この表現を用いて，次の Poincaré 群の Lie 代数 (交換関係) を導け：

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu]=0,$$
$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{P}_\rho]=-i(g_{\mu\rho}\hat{P}_\nu-g_{\nu\rho}\hat{P}_\mu),$$
$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}]=-i(g_{\mu\rho}\hat{M}_{\nu\sigma}-g_{\nu\rho}\hat{M}_{\mu\sigma}-g_{\mu\sigma}\hat{M}_{\nu\rho}+g_{\nu\sigma}\hat{M}_{\mu\rho}).$$

1.2　1-1 (35) で与えた $\hat{M}_{\mu\nu}=(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ の x^μ 上の 4×4 行列表現では，

$$-\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu=(i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}+i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K})^\mu{}_\nu=\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\begin{pmatrix}0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3\\ -\omega_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2\\ -\omega_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1\\ -\omega_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0\end{pmatrix}$$

となることを確かめよ。これと **1-2** (21) とを用いて，**1-2** (25) と等価な $\Lambda^\mu{}_\nu=(1/2)\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^\mu a\sigma_\nu a^\dagger)$ の関係が成立することを示せ。

1.3　1-2 (33), (34), (46) ～ (48) の公式を確かめよ。

1.4　零質量スカラー場の $\lambda\phi^4$ 理論，$\mathcal{L}=(1/2)(\partial_\mu\phi)^2-(\lambda/4!)\phi^4$，は，時空が 4 次元のとき，dilatation 変換と呼ばれる次の α をパラメータとする変換

$$\phi(x)\longrightarrow\phi'(x')=e^\alpha\phi(x), \qquad x'^\mu=e^{-\alpha}x^\mu$$

の下で不変である。この変換に対応する Noether カレントが，**1-3** (14) のエネルギー・運動量テンソル $T_\rho{}^\mu$ を用いて，次式で与えられることを示せ。

$$j_D^\mu = x^\nu T_\nu{}^\mu + \frac{1}{2}\partial^\mu(\phi^2).$$

Noether カレントの不定性 **1-3** (23) を用いて，この $T_\nu{}^\mu, j_D^\mu$ の代わりに

$$\Theta_\nu{}^\mu \equiv T_\nu{}^\mu + a\,\partial_\rho[(\delta_\nu^\rho\partial^\mu - \delta_\nu^\mu\partial^\rho)\phi^2] = T_\nu{}^\mu + a(\partial_\nu\partial^\mu - \delta_\nu^\mu\Box)\phi^2$$

$$D^\mu \equiv j_D^\mu + b\,\partial_\rho[(x^\mu\partial^\rho - x^\rho\partial^\mu)\phi^2]$$

を，それぞれ，新しいエネルギー・運動量テンソル，dilatation カレントにとれば，運動方程式を用いずに $D^\mu = x^\nu\Theta_\nu{}^\mu$ の関係式が成り立つ。これが成立するための係数 a, b の値を決定し，このことを確かめよ。[$\Theta_\nu{}^\mu$ は improved energy-momentum tensor と呼ばれるものである。] また，ϕ の質量項 $(-1/2)\mu^2\phi^2$ が存在する場合にも，そのときの $T_\nu{}^\mu$ を用いて $\Theta_\nu{}^\mu, D^\mu$ を定義すれば，$\partial_\mu D^\mu = \Theta_\mu{}^\mu = \mu^2\phi^2$ となることを示せ。

1.5 1-4 (16) の Lagrangian を持つ $O(N)$-$\lambda\phi^4$ 模型において，N 種の場 $(\phi_1, \cdots, \phi_N)^T$ を N 成分ベクトルとみなすときの，$N(N-1)/2$ 個の独立な $O(N)$ 回転の無限小形と，対応する Noether カレントを求めよ。

1.6 1-5 (24) を確かめ，$\bar\psi\psi, \bar\psi\gamma_5\psi, \bar\psi\gamma_\mu\psi, \bar\psi\gamma_5\gamma_\mu\psi, \bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi$ が，それぞれ，スカラー，擬スカラー，ベクトル，軸性ベクトル，テンソル，の Lorentz 変換性を持つことを示せ。

1.7 $U(1)$ ゲージ場の場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ でつくった擬スカラー量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ は，ある量の全微分となっていることを示せ。

1.8 一般の系の Lagrangian $L(q, \dot q)$ は，

$$L = \frac{1}{2}A_{ij}(q)\,\dot q^i\,\dot q^j + B_i(q)\,\dot q^i + C(q)$$

の形を持つ。この系の作用積分 $S = \int dt\ L$ が，次の形の無限小変換

$$\delta q^i = D^i(q) + E^i{}_j(q)\,\dot q^j, \qquad \delta\dot q^i = (d/dt)\delta q^i,$$

の下で不変，すなわち，ある $X(q, \dot q)$ があって，L の変化が

$$\delta L = (\partial L/\partial q^i)\delta q^i + (\partial L/\partial\dot q^i)\delta\dot q^i = (d/dt)X$$

と全微分の形で書けるとする。このとき，次の問に答えよ。

1) $X(q, \dot q)$ は，$\dot q$ に関して高々 2 次までであること，すなわち

$$X = \frac{1}{2}\alpha_{ij}(q)\,\dot q^i\,\dot q^j + \beta_i(q)\,\dot q^i + \gamma(q)$$

の形をとることを示せ。また $\delta L = dX/dt$ が恒等式であることから従う，α, β, γ と A, B, C, D, E の間の関係式を導け。

2) 上の不変性に対応した Noether 電荷 Q をつくれ。

3) $A_{ij}(q)$ が逆行列 $A^{-1\,ij}(q)$ を持つと仮定して，運動量変数 $p_i \equiv \partial L/\partial\dot q^i$ と座標変数 q^i とで Noether 電荷 Q を書き表せ。

4) 正準交換関係 $[q^i, p_j] = i\delta_j^i$ を設定して，Noether 電荷 $Q(q, p)$ が正準交換関係の意味でもとの変換の生成子となっていること，

$$[iQ, q^i] = \delta q^i$$

を示せ。ただし Q や δq^i の中の q, p の演算子順序の問題は考えないことにする。

2. 場の量子化

2-1 自由スカラー場の量子化

まず実スカラー場 ϕ の場合を考えよう。$\lambda\phi^4$ 模型の Lagrangian 密度は，1-4 ですでに与えた：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^2)-\frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{1}$$

この系の量子化を，標準的な，いわゆる正準量子化 (canonical quantization) の手続きによって行う。Lagrangian L は，時刻 $x^0=t$ を一つ固定して，

$$L=\int d^3x\ \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)) \qquad \left(\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{2}$$

で与えられ，$\{\phi(\boldsymbol{x},t)\}_{\boldsymbol{x}}$ が連続無限個の座標変数である。$\phi(\boldsymbol{x},t)$ に正準共役な運動量変数 $\pi(\boldsymbol{x},t)$ は，

$$\pi(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}=\dot{\phi}(x) \tag{3}$$

となる。場の量子化は，ϕ,π を演算子として，次の同時刻交換関係を要求して行われる：

$$\begin{aligned}&[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\&[\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{y},t)]=[\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Hamiltonian H は，また通常の手続通り，

$$H=\int d^3x\,(\pi\dot{\phi}-\mathcal{L})=\int d^3x\left[\frac{1}{2}(\pi^2+(\nabla\phi)^2+\mu^2\phi^2)+\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right], \tag{5}$$

で与えられるから，Heisenberg (ハイゼンベルク) 運動方程式は，(4) の交換関係を用いて

$$i\dot{\phi}=[\phi, H]=i\pi,$$
$$i\dot{\pi}=[\pi, H]=-i\left\{(-\nabla^2+\mu^2)\phi+\frac{\lambda}{3!}\phi^3\right\}, \tag{6}$$

となる。これは (1) から従う Euler-Lagrange 運動方程式，**1-4** (8)，

$$(\Box+\mu^2)\phi=-\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{7}$$

とちょうど一致している。

以後，相互作用項のない ($\lambda=0$ の) 自由場の場合に話を限る。そのときの (7)，$(\Box+\mu^2)\phi=0$ は Klein (クライン)-Gordon (ゴルドン) 方程式といわれる。(4) の正準交換関係の要求が，波動である場 ϕ に粒子描像を与えることを見るため，まず，$\phi(\boldsymbol{x}, t)$ を 3 次元 Fourier 展開する：

$$\phi(\boldsymbol{x}, t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}q_{\boldsymbol{k}}(t)\,e^{i\boldsymbol{kx}}. \tag{8}$$

そうすれば，Klein-Gordon 方程式から

$$\ddot{q}_{\boldsymbol{k}}+(\boldsymbol{k}^2+\mu^2)q_{\boldsymbol{k}}=0 \tag{9}$$

が出るので，$q_{\boldsymbol{k}}(t)$ は調和振動子であることがわかり，一般解は，

$$q_{\boldsymbol{k}}(t)=q_1(\boldsymbol{k})e^{-ik_0t}+q_2(\boldsymbol{k})e^{ik_0t},$$
$$k_0\equiv\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}>0 \tag{10}$$

となる。(8) の ϕ が実 (エルミート演算子) であることから，$q_2(\boldsymbol{k})=q_1^\dagger(-\boldsymbol{k})$ が従うので，$q_1(\boldsymbol{k})\equiv a(\boldsymbol{k})/\sqrt{2k_0}$ と書くことにすれば，ϕ は (8)，(10) より

$$\phi(x)=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}\{a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\} \tag{11}$$

ここで 4 次元記法 $kx\equiv k_0x_0-\boldsymbol{kx}=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\,t-\boldsymbol{kx}$ を使った。$\pi(x)=\dot{\phi}(x)$ は

$$\pi(x)=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}\{-ik_0a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+ik_0a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}. \tag{12}$$

(11) と (12)，あるいは容易に確かめられるその逆変換の式

$$a(\boldsymbol{k})=(f_{\boldsymbol{k}}, \phi)\equiv i\int d^3x\, f_{\boldsymbol{k}}^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x)$$
$$f_{\boldsymbol{k}}(x)\equiv e^{-ikx}/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0} \tag{13}$$

を用いれば，(4) の同時刻交換関係が，$a(\boldsymbol{k})$，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ に対する交換関係

$$[a(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}),$$
$$[a(\boldsymbol{k}),\ a(\boldsymbol{q})]=[a^\dagger(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{q})]=0, \tag{14}$$

と等価であることがわかる。

エネルギー運動量 P^μ は，**1-3** で一般的に求めたエネルギー運動量テンソル $T_\rho{}^\mu$ の表式 (14) を用い，上の $\phi(x)$ の表式 (11) を代入して

$$P^\mu=\int d^3x\,(\dot\phi\partial^\mu\phi-g^{\mu0}\mathcal{L})$$
$$=\int d^3k\,\frac{1}{2}k^\mu[a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})] \tag{15}$$

と求まる。ここまでは演算子の順序を全然変えていない。そこで (14) の交換関係の $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{q}$ のもの

$$[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k})]=\delta^3(\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0})=\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}\,e^{i\boldsymbol{px}}\Big|_{\boldsymbol{p}=0}$$
$$=(2\pi)^{-3}\int d^3x \tag{16}$$

を使い，個数密度演算子

$$n(\boldsymbol{k})=a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{17}$$

を定義して，(15) を書き直すと

$$P^\mu=\int d^3k\ k^\mu n(\boldsymbol{k})+\int\frac{d^3k\,d^3x}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}k^\mu \tag{18}$$

となる。第 2 項は演算子ではなく単なる数 (c 数と呼ばれる) であるが，それは $\mu=1,2,3$ の場合 d^3k の対称積分で消えるので，$\mu=0$ すなわちエネルギー $E=P^0$ の場合のみ残る。それは，$(2\pi\hbar)^3$ の単位位相空間当り 1 個の量子自由度があり，それぞれが持つ零点振動エネルギー $(1/2)\hbar\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$ を全自由度について足し上げた量，というふうに理解できるので，真空＝基底状態 のエネルギーに相当する。この項は，空間体積が無限ということによる発散と，振動数 (運動量) の大きいところに無限の自由度があるということによる発散 (紫外発散) と，二重の意味で発散している。それで，P^μ を well-defined なものとするため，エネルギーの原点をずらして，(18) の第 2 項の c 数項を単に捨てて

$$P^\mu=\int d^3k\ k^\mu n(\boldsymbol{k}) \tag{19}$$

とする。c 数項は，P^μ の並進演算子としての交換関係

$$[iP_\mu,\phi(x)]=\partial_\mu\phi(x) \tag{20}$$

には無関係だし，また，もともと，古典論での P^μ の表式では演算子の順序は決まっておらず，出発点から「$a^\dagger$ は左，a は右」という正規順序 (normal

order) であったと考えれば c 数項は初めからない†，からである。

さて，この系の基底状態は，調和振動子でよく知っているように，

$$a(\boldsymbol{k})|0\rangle=0 \qquad (\text{任意の } \boldsymbol{k} \text{ に対し}) \tag{21}$$

で定義される真空 $|0\rangle$ である。この真空 $|0\rangle$ は，(19) の P^μ を演算すると $P^\mu|0\rangle=0$ であるから，エネルギーも運動量も 0 である。この系の一般の状態は

$$|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle=a^\dagger(\boldsymbol{k}_1)a^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle, \tag{22}$$

あるいは，それらの線形結合で与えられる。交換関係 (14) より

$$[P^\mu, a^\dagger(\boldsymbol{k})]=k^\mu a^\dagger(\boldsymbol{k}) \tag{23}$$

を得るから，(22) の状態は P^μ を演算して

$$P^\mu|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle=(k_1{}^\mu+k_2{}^\mu+\cdots+k_n{}^\mu)|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle \tag{24}$$

となり，4 元運動量 $k_1{}^\mu+k_2{}^\mu+\cdots+k_n{}^\mu$ の固有状態であることがわかる。このことと，$k^\mu=(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2},\ \boldsymbol{k})$ とから，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ は，運動量が $\boldsymbol{k}$ の質量 μ の**粒子**を 1 個つくる演算子という解釈ができる。すなわち，これで波動場から出発して，その量子化によって粒子描像に到達したのである。(22) のような状態を Fock (フォック) 基底，それらの線形結合で張られる Hilbert 空間を Fock 空間と呼ぶ。

(14) のような交換関係を Bose (ボーズ) 統計，それに従う粒子を Bose 粒子またはボソンと呼ぶ。一方反交換関係を設定する場合を，Fermi (フェルミ) 統計，その粒子を Fermi 粒子またはフェルミオンと呼ぶ。スカラー場の量子化の際に，(14) あるいは (4) で，反交換関係でなく交換関係を設定する必要があったのは，(15) からわかることに注意したい。スカラー場のエネルギーの表式 $\pi^2+(\nabla\phi)^2+\mu^2\phi^2$ あるいは $aa^\dagger+a^\dagger a$ は，もし反交換関係をとれば，0 あるいは単なる c 数というおかしなことになってしまう。

自由場は (11) のごとく完全に解けているので，同時刻のみならず，任意の時空点での 4 次元的交換関係が求まる。(11), (14) を用いて，

---

† しかし実は，自由場でないときに $a(\boldsymbol{k})$ や $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ を自然な形で定義することはできないので，正規順序というのは自然な概念ではない。a や $a^\dagger$ ではなく場 $\phi(x)$ を第一義的な量と考えるのが自然である。そうすれば，やはり上記の無限大の真空エネルギーが存在することになる。しかも現実には重力場と相互作用しているので，エネルギーの原点を勝手にずらすことはできず，この c 数項は無限大の "宇宙項" という物理的意味を持ってくる。無限大の宇宙項があると，この世界のような平担な宇宙は存在できなくなる。この困難を真剣に捉える人達は，この事実を逆にこの世界に「超対称性 (supersymmetry)」が存在することの最有力な証拠と考えている。もし超対称性 (演習問題 2.5 参照) が存在すると，Bose 粒子の真空エネルギーと Fermi 粒子の真空エネルギーとがちょうど符号が逆で相殺するのである。

$$
\begin{aligned}
&[\phi(x), \phi(y)] \\
&=\int \frac{d^3k\, d^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2k_0 2q_0}} \{e^{-ikx+iqy}[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{q})] + e^{ikx-iqy}[a^\dagger(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{q})]\} \\
&=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \\
&=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \epsilon(k_0)\delta(k^2-\mu^2)e^{-ik(x-y)} \equiv i\varDelta(x-y).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ただし，$\epsilon(x)$ は x の符号関数 $\mathrm{sgn}\, x = x/|x|$ $(\epsilon(0)=0)$，3 番目の等号の後では k_0 はもはや $\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$ ではなく積分変数であること，に注意せよ。この式で不変デルタ関数 $\varDelta(x)$ を定義したので，その性質を列挙しておこう：

i) Lorentz 不変性： $\varDelta(x)=\varDelta(x')$ (26)

ii) 奇関数： $\varDelta(-x)=-\varDelta(x)$ (27)

iii) ミクロ因果律： $x^2<0$ に対し $\varDelta(x)=0$ (28)

iv) $x_0=0$ で
$$
\begin{cases} \varDelta(x)=0 & (29) \\ \dot{\varDelta}(x)=-\delta^3(\boldsymbol{x}) & (30) \end{cases}
$$

i), ii) は (25) の第 3，第 2 表式から明白。iii) は次のようにわかる。$x^2<0$，すなわち点 x が原点から space-like に離れていると，ある Lorentz 系で $x_0=0$ とできる。ところが，$\varDelta(0, \boldsymbol{x})=0$ は (25) の第 2 表式から明らかで，Lorentz 不変性から iii) が従う。iv) の第 1 式は $\varDelta(0, \boldsymbol{x})=0$，第 2 式も，(25) の第 2 表式を時間微分してすぐ出る。

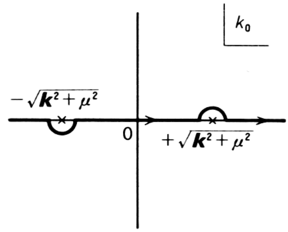
次に，T 積 (時間順序積，time ordered product)

$$
\mathrm{T}\phi(x)\phi(y) \equiv \theta(x^0-y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0-x^0)\phi(y)\phi(x) \tag{31}
$$

の真空期待値で定義される，摂動論で重要な役割を果たす Feynman 伝播関数 (Feynman propagator) を計算しよう。ここで $\theta(t)$ は $t>0$ のとき 1，$t<0$ のとき 0 ($\theta(0)=1/2$) と定義される階段関数である。再び (11) と (14) を用いて，

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\
&\quad=\int \frac{d^3k\, d^3q}{(2\pi)^3\sqrt{2k_0 2q_0}} \{\theta(x_0-y_0)e^{-ikx+iqy}\langle 0|a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle \\
&\qquad\qquad + \theta(y_0-x_0)e^{ikx-iqy}\langle 0|a(\boldsymbol{q})a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle\} \\
&\quad=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\{\theta(x_0-y_0)e^{-ik(x-y)} + \theta(-x_0+y_0)e^{ik(x-y)}\} \\
&\quad=\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\mu^2-k^2-i\epsilon} \equiv \varDelta_F(x-y)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

を得る。最後の 4 次元積分表式の分母の $-i\epsilon$ の ϵ は正の無限小で，k_0 積分の極 (pole) を無限小だけ実軸からずらす，$k_0=\pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2-i\epsilon}=\pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\mp i\epsilon$, ことにより，実質上 k_0 積分の積分路を 2·1 図のように指定する役割を果たす。実際この k_0 積分は，$x_0-y_0>0$ のときは，$e^{-ik(x-y)}$ 因子は $\mathrm{Im}\,k_0<0$ 方向が小さくなる方向なので，2·1 図の積分路を下半面で半径 ∞ 大の半円で閉じ，Cauchy の定理で $k_0=+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$ の極での留数を拾う，逆に，$x_0-y_0<0$ のときは，積分路を上半面で閉じ，$k_0=-\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$ の極の方を拾う，ということで評価でき，(32) の 3 次元積分の表式 (そこでは $k_0\equiv\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$) になることが確かめられる。



2·1 図

Feynman 伝播関数 Δ_F は，Klein-Gordon 演算子の一つの逆を与えることに注意しておこう：

$$(\Box+\mu^2)\Delta_F(x)=-i\delta^4(x) \tag{33}$$

複素スカラー場 $\varphi(x)$ の場合も全く同様にやれる。(11) に対応した場の展開は

$$\varphi(x)=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}\{a_-(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a_+^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\} \tag{34}$$

で，$\varphi^*(x)$ 場の展開は，この式 (34) の hermite 共役で与えられる。正準交換関係は，

$$[a_+(\boldsymbol{k}), a_+^\dagger(\boldsymbol{q})]=[a_-(\boldsymbol{k}), a_-^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \tag{35}$$

で，他の組合せは皆可換である。+, − 量子の個数密度演算子

$$\begin{aligned} n_+(\boldsymbol{k})&=a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}),\\ n_-(\boldsymbol{k})&=a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{36}$$

を定義すれば，エネルギー運動量は (再び零点振動エネルギー部分を落として)

$$P^\mu=\int d^3k\ k^\mu\{n_+(\boldsymbol{k})+n_-(\boldsymbol{k})\}, \tag{37}$$

1-4 (13) で与えた電荷 $Q=\int d^3x\, i(\dot{\varphi}^*\varphi-\varphi^*\dot{\varphi})$ は

$$Q=\int d^3k\{n_+(\boldsymbol{k})-n_-(\boldsymbol{k})\} \tag{38}$$

と計算される[†]。これから，± 量子は，同じ質量を持った，電荷 $Q=\pm 1$ の粒子を表すことがわかる。このような粒子の例は荷電 π 中間子 π^+ と π^-，中性 K 中間子 K_0 と $\bar{K}_0$ などである。(後者の場合 Q は本当の電磁気的電荷ではなく，ある量子数である。)

4 次元交換関係は

$$[\varphi(x), \varphi^*(y)] = i\Delta(x-y), \tag{39}$$

Feynman 伝播関数は

$$\langle 0|\mathrm{T}\varphi(x)\varphi^*(y)|0\rangle = \Delta_F(x-y), \tag{40}$$

となる。φ どうし，φ^* どうしの 4 次元交換関係，Feynman 伝播関数はすべて 0 である。

1-4 (17) で述べたように，複素スカラー場 φ, φ^* は，二つの実スカラー場 ϕ_1, ϕ_2 と等価である。実スカラー場 ϕ_1, ϕ_2 に対して，先の結果を適用すれば，ここでの φ, φ^* に対するすべての結果を再確認することができる。

2-2 自由 Dirac 場の量子化

自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は，**1-5** (20) と (21) より

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \tag{1}$$

ここで，作用積分に影響を与えない全微分項 $-i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ を，量子化の便宜のために捨てた。全微分項を残しても同じ量子化に導かれることは，後の **5-2** で明らかになるだろう。**1-5** で述べたように，ψ は“c 数”としては Grassmann 数であるから，順序を注意して扱おう。

再び $x^0=t$ を一つ固定する。座標変数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ (α は 4 成分スピノール添字) に共役な運動量変数 $\pi_\psi^\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ は

$$\pi_\psi^\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}) = i\bar{\psi}^\beta(x)(\gamma^0)_\beta{}^\alpha = i\psi^{*\alpha}(x). \tag{2}$$

ここで，$\dot{\psi}$ についての微分は，**右微分**の約束をとった。一般に，Grassmann 数 θ による微分は，左微分と右微分が定義でき，それぞれ次の Leipnitz 則を満たすものとして定義する：

$$\begin{aligned} &\text{左微分：}(\partial/\partial\theta)AB = [(\partial/\partial\theta)A]B + (-)^{|A|}A[(\partial/\partial\theta)B], \\ &\text{右微分：}\partial(AB)/\partial\theta = A(\partial B/\partial\theta) + (-)^{|B|}(\partial A/\partial\theta)B. \end{aligned} \tag{3}$$

---

† 電荷 Q にも，このままでは無限大の c 数項が現れるが，Q の場合は簡単に演算子順序を対称化して，$Q=i\int d^3x(\dot{\varphi}^*\varphi-\varphi^*\dot{\varphi})_{\text{対称}} \equiv \frac{i}{2}\int d^3x[\{\dot{\varphi}^*, \varphi\}-\{\varphi^*, \dot{\varphi}\}]$ としておけば c 数項が出ない。

指数部の $|A|$ は，量 A が Grassmann 奇 (奇数個の Grassmann 数の積) のとき 1，Grassmann 偶 (偶数個の Grassmann 数の積またはふつうの c 数) のとき 0，と定義する。$(-)^{|A|}$ は A の符号因子，$|A|$ は統計指数と呼ぶ。

(2) により，複素共役量 ψ^* は ψ の共役運動量変数 π_ψ ということになったので，さらに (ψ^* を座標変数と考え) ψ^* の共役運動量変数を求めるということはしない†。スピノール場をフェルミオンの場として量子化すべく，次の同時刻**反交換**関係を設定する：

$$\begin{aligned}&\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\pi_\psi^\beta(\boldsymbol{y},t)\}=i\,\delta_\alpha^\beta\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\&\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_\beta(\boldsymbol{y},t)\}=\{\psi^{*\alpha}(\boldsymbol{x},t),\psi^{*\beta}(\boldsymbol{y},t)\}=0.\end{aligned}\tag{4}$$

第 1 式の反交換関係は，(2) を使えば

$$\{\psi(\boldsymbol{x},t),\bar{\psi}(\boldsymbol{y},t)\}=\gamma^0\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\tag{5}$$

と書いてもよい。ここで ψ は 4 成分を縦に，$\bar{\psi}$ は横に，並べた量と考えている。Hamiltonian H は，通常の手続きに従って††，

$$\begin{aligned}H&=\int d^3x\,(\pi_\psi\dot{\psi}-\mathcal{L})\\&=\int d^3x\,\bar{\psi}(-i\gamma^k\partial_k+m)\psi\\&=\int d^3x\,\psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+m\beta)\psi.\end{aligned}\tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{\alpha}\equiv\gamma^0\boldsymbol{\gamma},\beta\equiv\gamma^0$ の記号を使った。ここでも Heisenberg 方程式 $i\dot{\psi}=[\psi,H]$ は，(4) の反交換関係を使えば，

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0\tag{7}$$

を出し，(1) の $\mathcal{L}$ から従う Euler-Lagrange 方程式と一致する。(7) は Dirac 方程式と呼ばれる。

Dirac 方程式の解の完全系　Dirac 方程式 (7) の平面波解 $\psi_\alpha(x)=u_\alpha(p)e^{-ipx}$ の完全系を求めよう。4 成分スピノール $u_\alpha(p)$ は，(7) より

$$(\not{p}-m)u(p)=0,\qquad \not{p}\equiv p^\mu\gamma_\mu\tag{8}$$

を満たさなければならない。これが 0 でない解を持つには，係数行列の行列

---

† より正確には，ψ も ψ^* も共に座標変数とし，それらの共役運動量を求めるという扱いをやらねばならないが，それには後述の “特異系の量子化” の手続きが必要になる。ここでのやり方は簡単に同じ結果を得る “簡便量子化法” であり，この方法を適用できるよう，(1) で部分積分を行った。

†† もし共役運動量 π を定義するのに**左**微分の約束をとっていたなら，Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{H}=\pi\dot{\psi}-\mathcal{L}$ ではなく $\mathcal{H}=\dot{\psi}\pi-\mathcal{L}$ としなければならない。π と $\dot{\psi}$ の順序は，$\mathcal{H}$ の変分 $\delta\mathcal{H}$ が，速度変数の変分 $\delta\dot{\psi}$ に依存してはいけないという要請で決まる。

式† $\det(\not{p}-m)=(p^2-m^2)^2$ が 0 であることが必要で，p_0 は

$$p_0=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \quad \text{または} \quad -\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{9}$$

でなければならない。ここでも，今後，正エネルギー $+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ のことを p_0 と記し，負エネルギーの方を $-p^0$ と呼ぶことにする。正エネルギー p_0 に対応する解 $u(\boldsymbol{p},s)$ は

$$(\not{p}-m)u(\boldsymbol{p},s)=0 \tag{10}$$

を満たす。係数行列 $(\not{p}-m)$ の rank を調べると 2 であることがわかるので，この方程式には $4-2=2$ 個，独立な解があり，$u(\boldsymbol{p},s)$ の引数 s は，その二つを区別するためのものである。負エネルギー $-p_0$ に対応する解 $v(\boldsymbol{p},s)$ は便宜上，空間運動量も $-\boldsymbol{p}$ のものを考えることにするので

$$(-\not{p}-m)v(\boldsymbol{p},s)=0 \tag{11}$$

を満たす。これにも同じく独立な解が二つあり，s で区別する。s としては，ヘリシティ (helicity) と呼ばれるスピンの運動量方向への射影（の 2 倍）$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})/|\boldsymbol{p}|$ の固有値 ± 1 をとることが多い。この演算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ は実際，$(\pm\not{p}+m)$ と可換であり，同時に固有値が指定できるのである。

そうすれば，$u(\boldsymbol{p},s=\pm)e^{-ipx}$，$v(\boldsymbol{p},s=\pm)e^{ipx}$ が解の完全系であるから，Dirac 方程式 (7) を満たす場 $\psi(x)$ は，これらで一般に展開できて

$$\psi(x) =\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\sum_{s=\pm}\{b(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx}+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}\} \tag{12}$$

と書ける。$b(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ は係数（演算子）である。

ここでは解のあらわな表式を与えない††が，次に述べる一般的な性質だけで間に合うことが多い。

i） まず，負エネルギー解 $v(\boldsymbol{p},s)$ としては，[1-5 (31) の荷電共役変換 C で得られる] 反粒子場 $\psi_{反}\equiv\psi^C=i\gamma^2\psi^*$ の，(12) から従う展開式

$$\psi_{反}(x)=\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\sum_{s=\pm}\Big[d(\boldsymbol{p},s)\,\{i\gamma^2 v^*(\boldsymbol{p},s)\}e^{-ipx} +b^\dagger(\boldsymbol{p},s)\{i\gamma^2 u^*(\boldsymbol{p},s)\}e^{ipx}\Big] \tag{13}$$

---

† $\det(\not{p}-m)$ は Lorentz 不変だから，p^2 のみの関数である。したがって p^μ の符号を変えたものとも等しいので

$$\det(\not{p}-m)=[\det(\not{p}-m)\det(-\not{p}-m)]^{\frac{1}{2}}=[\det(-p^2+m^2)]^{\frac{1}{2}}=(p^2-m^2)^2.$$

†† 解のあらわな表式は，もちろん，γ 行列の表示に依存する。便宜のため，標準表示をとったときの解のあらわな表式を付録 A に与えておく。

の負エネルギー解と一致するように,

$$v(\boldsymbol{p}, s) \equiv i\gamma^2 u^*(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{u}^T(\boldsymbol{p}, s) \tag{14}$$

と, $u(\boldsymbol{p}, s)$ から決まるものを採用する。実際 (14) で与えられる $v(\boldsymbol{p}, s)$ が, 負エネルギーの方程式 (11) を満たすことはすぐ確かめられる。すると逆に

$$u(\boldsymbol{p}, s) = i\gamma^2 v^*(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{v}^T(\boldsymbol{p}, s) \tag{15}$$

を満たすから, $\psi_{反}(x)$ の展開 (13) は $\psi(x)$ の展開 (12) と全く同じ形になり, 単に係数演算子の $b(\boldsymbol{p}, s)$ と $d(\boldsymbol{p}, s)$ とを入れ換えたものになる。

ii) この約束の下で, 解 $u(\boldsymbol{p}, s)$ の規格化を

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)u(\boldsymbol{p}, s') = 2m\delta_{ss'} \tag{16}$$

ととれば, 次の規格化・直交性が従う:

$$\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)v(\boldsymbol{p}, s') = -2m\delta_{ss'} \tag{17}$$

$$u^\dagger(\boldsymbol{p}, s)v(-\boldsymbol{p}, s') = v^\dagger(\boldsymbol{p}, s)u(-\boldsymbol{p}, s') = 0 \tag{18}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s') = \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu v(\boldsymbol{p}, s') = 2p^\mu \delta_{ss'}. \tag{19}$$

(18) は $u(\boldsymbol{p}, s), v(-\boldsymbol{p}, s)$ が hermite な行列 $\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m) = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m$ の正負エネルギー固有値 $\pm p_0$ に, それぞれ属する固有ベクトルであることから従う。(19) は, 運動方程式 (10), (11) を使い, $2p^\mu = \not{p}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{p}$ をはさめば導ける。

iii) $u(\boldsymbol{p}, s=\pm)$ は $\not{p} = m$ を, $v(\boldsymbol{p}, s=\pm)$ は $-\not{p} = m$ を, それぞれ満たす 2 次元解空間の完全系であること, および, $\pm\not{p} = m$ を満たす 2 次元解空間への射影演算子は明らかに $(\pm\not{p} + m)/2m$ で与えられるから,

$$\begin{aligned}\sum_{s=\pm} u(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) &= \not{p} + m \\ \sum_{s=\pm} v(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{v}(\boldsymbol{p}, s) &= \not{p} - m\end{aligned} \tag{20}$$

を得る。比例係数は規格化 (16), (17) を考慮した。

iv) (20) で $s=\pm$ の和をとらない場合の表式は, 二つの独立解を区別する s を何にとるかにもちろんよる。上述のようにヘリシティ固有値

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})u(\boldsymbol{p}, s) = s\,u(\boldsymbol{p}, s) \qquad \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}| \tag{21}$$

$s = \pm 1$ で指定してある場合には, $(1 \pm \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2$ が射影演算子だから,

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) &= (\not{p} + m)(1 + s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2, \\ v(\boldsymbol{p}, s)\bar{v}(\boldsymbol{p}, s) &= (\not{p} - m)(1 - s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\end{aligned} \tag{22}$$

を得る。v の方の式は (14) から従う $v\bar{v}=\gamma^2(u\bar{u})^*\gamma^2$ を使って導く。ただし，(21),(22) で記した $\boldsymbol{\sigma}$ というのは，次の 4×4 行列

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}=\boldsymbol{\sigma}=(\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \tag{23}$$

の意味である。$\sigma^{\mu\nu}$ は **1-5** (18) の行列。

さて，これらの解の性質，(18) と (19)，を使えば，展開 (12) の逆変換が，

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{p},s)&=(U_{ps},\psi) \qquad & U_{ps}(x)&\equiv u(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx}/\sqrt{(2\pi)^3 2p_0} \\ d^\dagger(\boldsymbol{p},s)&=(V_{ps},\psi) \qquad & V_{ps}(x)&\equiv v(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}/\sqrt{(2\pi)^3 2p_0} \end{aligned} \tag{24}$$

で与えられることが容易にわかる。ここでの内積（ , ）は

$$(U,\psi)\equiv\int d^3x\ \bar{U}(x)\gamma_0\psi(x). \tag{25}$$

(12)，あるいは (24) を使えば，(4) の同時刻反交換関係が，

$$\begin{aligned} &\{b(\boldsymbol{p},s), b^\dagger(\boldsymbol{q},s')\}=\{d(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{q},s')\}=\delta_{ss'}\,\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}), \\ &\text{その他の組合せは，すべて反可換} \end{aligned} \tag{26}$$

という，$b, b^\dagger, d, d^\dagger$ に対する反交換関係と等価であることがわかる。

エネルギー運動量 P^μ は，**1-3** (14) の $T^{\mu\nu}$ の表式を用い，上の $\psi(x)$ の展開式 (12) を代入し，演算子の順序を変えずに計算すれば，

$$\begin{aligned} P^\mu&=\int d^3x\,[i\psi^\dagger\partial^\mu\psi-g^{\mu0}\mathcal{L}] \\ &=\int d^3p\sum_{s=\pm}p^\mu[b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)-d(\boldsymbol{p},s)d^\dagger(\boldsymbol{p},s)] \end{aligned} \tag{27}$$

が得られる。(26) の反交換関係を用いて，$d, d^\dagger$ の順序を交換すれば

$$\begin{aligned} P^\mu=&\int d^3p\sum_{s=\pm}p^\mu[b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)d(\boldsymbol{p},s)] \\ &+\int\frac{d^3p\,d^3x}{(2\pi)^3}\sum_{s=\pm}(-p^\mu) \end{aligned} \tag{28}$$

を得る。

ここでは (27) から (28) へ簡単に変形したが，このステップには Dirac の空孔理論のアイデアが隠されている。我々は，場の展開式 (12) で，正エネルギー解の係数を $b(\boldsymbol{p},s)$ としたにもかかわらず，負エネルギー解の係数を $d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ と書いたために，$d^\dagger$ を生成演算子と思って (28) の正規順序にしたわけである。しかし，$b(\boldsymbol{p},s)$ と同等に扱うなら，この $d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ はむしろ消滅演算子 $\tilde{d}(\boldsymbol{p},s)$ と記すべきものである。そうすれば，(27) は，既に

$$P^\mu=\int d^3p\sum_{s=\pm}p^\mu[b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)-\tilde{d}^\dagger(\boldsymbol{p},s)\tilde{d}(\boldsymbol{p},s)] \tag{29}$$

なる正規積の形になっており，$\tilde{d}^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ は確かに負エネルギーの 4 元運動量 $-p^\mu=(-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2},-\boldsymbol{p})$ を持つ量子をつくる演算子になっている。この負エネルギーの困難を避けるため，$b(\boldsymbol{p},s)$ でも $\tilde{d}(\boldsymbol{p},s)$ でも消される“全く空っぽの真空” $|\tilde{0}\rangle$ を考える代わりに，負エネルギー状態がすべて占有された状態

$$|0\rangle=\Bigl(\prod_{\text{すべての}\ \boldsymbol{p},s}\tilde{d}^\dagger(\boldsymbol{p},s)\Bigr)|\tilde{0}\rangle \tag{30}$$

を我々の本当の真空 $|0\rangle$ と考える。そうすると，我々は反交換関係，すなわち Fermi 統計を設定したので，この真空 $|0\rangle$ の上で，$\tilde{d}^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle=0$，$\tilde{d}(\boldsymbol{p},s)|0\rangle\neq0$ となって，生成・消滅演算子の役割が入れ換わる。そこで，$\tilde{d}^\dagger\equiv d$，$\tilde{d}\equiv d^\dagger$ と記して，d に関して正規順序の (28) を得る。(28) は，$d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ でつくられる量子も正エネルギー p^μ を持つことを表していて困難が回避されている。これは，“空っぽ”の $|\tilde{0}\rangle$ を基準にした言葉では，初め (30) の $|0\rangle$ に“存在”していた負エネルギー $(-p^\mu)$ 状態の量子を，$d^\dagger(\boldsymbol{p},s)=\tilde{d}(\boldsymbol{p},s)$ で“消す”のだから，相対的に p^μ だけエネルギー運動量が増える，と解釈できる。

この解釈では，(28) の最後の c 数項は，(30) の真空 $|0\rangle$ の持つエネルギー運動量である。すなわち占有された負エネルギー状態の 4 元運動量 $-p^\mu$ のすべての状態 $(\boldsymbol{p},s)$ にわたる和である。前節 (18) のスカラー場の真空エネルギー項 $\int\frac{d^3k\,d^3x}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}k_\mu$ が，零点振動エネルギーと解釈され**正**の量であったのと対照的に，スピノール場では**負**の量なのである。しかし符号を除けば，両者の自由度の数が等しいと，実は同一量であるという点も重要である。スカラー場の $k_\mu/2$ の係数 1/2 は実スカラー場だからであって，Dirac 場と同様の複素スカラー場のときは係数 1 となる。Dirac 場の場合はさらに spin s の自由度で 2 倍になるから，もし，Dirac 場一つに対し，それと全く同じ質量を持つ複素スカラー場が二つ存在すれば，ちょうど，真空エネルギー項はお互い相殺することになる。超対称性が存在するときは，そのようなことが起こる†。ここでは，超対称性に立ち入らず，スカラー場と同じ理屈付けで，(28) の c 数項を落とし，

$$P^\mu=\int d^3p\sum_{s=\pm}p^\mu[b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)d(\boldsymbol{p},s)] \tag{31}$$

とする。

† 演習問題 2.5 および 6.1 参照。

そもそも，スピノール場の場合，エネルギーの表式 (6) は正定値でなく，そのために (27) の第 2 項にマイナス符号が現れたのである。そのマイナス符号をプラスに変えて正定値のエネルギーの表式 (31) を得るために，スピノール場は Fermi 統計で量子化しなければならなかったわけである。

$U(1)_V$ 位相変換 **1-5** (27) に対応する保存カレントは，**1-5** (29) の $j^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ であるが，c 数項を避けるため，$\psi, \bar{\psi}$ の順序を反対称化する。すなわち，$j^\mu = -(1/2)[\bar{\psi}, \gamma^\mu\psi]$。そうすれば，対応する電荷 Q は，

$$
\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{2}\int d^3x\,[\psi^\dagger, \psi] \\
&= \int d^3p \sum_{s=\pm}[-b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)b(\boldsymbol{p}, s) + d^\dagger(\boldsymbol{p}, s)d(\boldsymbol{p}, s)] \qquad (32)
\end{aligned}
$$

となる。

(31) と (32) より，$b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)$ は電荷 $Q=-1$, 4 元運動量 $p^\mu = (\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}, \boldsymbol{p})$ を持った粒子をつくる演算子，$d^\dagger(\boldsymbol{p}, s)$ は電荷 $Q=+1$, $p^\mu = (\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}, \boldsymbol{p})$ なる粒子をつくる演算子であることがわかる。実は，b 量子と d 量子とは，互いに荷電共役変換 $\mathcal{C}$ で移る互いの反粒子である。b が電子だとすると d は反電子すなわち陽電子 (positron) である。実際，荷電共役ユニタリー変換 $\mathcal{C}$ を†

$$
\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = \psi^C(x) = C\bar{\psi}^T(x) \qquad (33)
$$

で定義すれば，(12)～(15) より，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}b(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{C}^{-1} &= d(\boldsymbol{p}, s), \\
\mathcal{C}d^\dagger(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{C}^{-1} &= b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)
\end{aligned} \qquad (34)
$$

が従うので，$\mathcal{C}^2=1$, $\mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$ を使って

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)|0\rangle &= d^\dagger(\boldsymbol{p}, s)|0\rangle, \\
\mathcal{C}d^\dagger(\boldsymbol{p}, s)|0\rangle &= b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)|0\rangle.
\end{aligned} \qquad (35)
$$

この系の一般の状態は，したがって，

$$
b^\dagger(\boldsymbol{p}_1, s_1)\cdots b^\dagger(\boldsymbol{p}_l, s_l)d^\dagger(\boldsymbol{q}_1, t_1)\cdots d^\dagger(\boldsymbol{q}_n, t_n)|0\rangle \qquad (36)
$$

や，それらの線形結合で与えられる。

Dirac 粒子のスピンを具体的に見るべく，4 次元角運動量 $M_{\mu\nu}$ の表式を求めよう。**1-3** の (21), (22) に対し，Dirac 場のとき $S_{\mu\nu} = D(\hat{M}_{\mu\nu})$ が，**1-5** (23) より $(1/2)\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4i$ で与えられることを使えば，

---

† 一般に，状態に対してあるユニタリー変換 $\mathcal{U}$ を $|\alpha\rangle \to \mathcal{U}|\alpha\rangle$ で定義すると，演算子 O に対する変換は，$O \to \mathcal{U}O\mathcal{U}^{-1}$，となる。

$$M_{\mu\nu}=\int d^3x\ \psi^\dagger(x)\left[i(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)+\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\right]\psi(x) \tag{37}$$

を得る。これに展開式 (12) を代入して計算すれば† (演習問題 2.3)

$$\begin{aligned}
M_{\mu\nu}
&=\int d^3p\sum_{s,s'}\left\{b^\dagger(\boldsymbol{p},s)\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p},s)}{\sqrt{2p_0}}\left[l_{\mu\nu}(\boldsymbol{p})+\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\right]\frac{u(\boldsymbol{p},s')}{\sqrt{2p_0}}b(\boldsymbol{p},s')\right.\\
&\qquad\left.+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)\frac{v^T(\boldsymbol{p},s)}{\sqrt{2p_0}}\left[\tilde{l}_{\mu\nu}(\boldsymbol{p})-\frac{1}{2}\sigma^T_{\mu\nu}\right]\frac{v^*(\boldsymbol{p},s')}{\sqrt{2p_0}}d(\boldsymbol{p},s')\right\}
\end{aligned}\tag{38}$$

$$l_{0i}(\boldsymbol{p})=i\frac{\partial}{\partial p^i}p_0,\quad \tilde{l}_{0i}(\boldsymbol{p})=ip_0\frac{\partial}{\partial p^i},\quad l_{ij}(\boldsymbol{p})=\tilde{l}_{ij}(\boldsymbol{p})=i\left(p_i\frac{\partial}{\partial p^j}-p_j\frac{\partial}{\partial p^i}\right).$$

ここで $\partial/\partial p^i$ はその後にくる $u(\boldsymbol{p},s)$, $b(\boldsymbol{p},s)$, $p_0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ などのすべてを微分するものとする。(14) の $v(\boldsymbol{p},s)$ と $u(\boldsymbol{p},s)$ の関係式を使えば，第 2 項は，第 1 項の粒子演算子 $b, b^\dagger$ を反粒子の $d, d^\dagger$ に置き換えたものと全く一致していることがわかる。さて，z-軸方向に走るヘリシティ $s=\pm1$ の 1 粒子状態

$$\begin{aligned}
&b^\dagger(\boldsymbol{q},\pm)|0\rangle,\\
&\boldsymbol{q}=(0,0,q),\qquad \sigma_3u(\boldsymbol{q},\pm)=\pm1u(\boldsymbol{q},\pm)
\end{aligned}\tag{39}$$

をとり，それに z-軸方向角運動量演算子 $J_z=M_{12}$ を演算してみよう。(38) の表式を用いて

$$\begin{aligned}
&J_z\,b^\dagger(\boldsymbol{q},\pm)|0\rangle\\
&=[M_{12},b^\dagger(\boldsymbol{q},\pm)]|0\rangle\\
&=\int d^3p\sum_s b^\dagger(\boldsymbol{p},s)|0\rangle\\
&\quad\times\left\{\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p},s)}{\sqrt{2p_0}}\left[-i\left(p^1\frac{\partial}{\partial p^2}-p^2\frac{\partial}{\partial p^1}\right)+\frac{1}{2}\sigma^3\right]\frac{u(\boldsymbol{q},\pm)}{\sqrt{2p_0}}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\right\}.
\end{aligned}\tag{40}$$

軌道部分は $q^1=q^2=0$ で落ち，(39) および $u^\dagger(\boldsymbol{q},s)u(\boldsymbol{q},\pm)=2q_0\delta_{s,\pm}$ を使って

$$J_z\,b^\dagger(\boldsymbol{q},\pm)|0\rangle=\pm\frac{1}{2}b^\dagger(\boldsymbol{q},\pm)|0\rangle \tag{41}$$

を得る。すなわち，ヘリシティ ±1 の Dirac 1 粒子状態は，確かに，その運動方向の角運動量が ±(1/2) である。

Dirac 場の場合の 4 次元反交換関係は，スカラー場の場合と同様にして，展開式 (12)，反交換関係 (26)，完全性 (20) を使えば

$$\{\psi_\alpha(x),\bar{\psi}_\beta(y)\}=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\,i\Delta(x-y)\equiv iS_{\alpha\beta}(x-y) \tag{42}$$

---

† $M_{\mu\nu}$ は保存量だから，$x_0=0$ とおいて計算するのが楽。

と求まる。ψ どうし，$\bar{\psi}$ どうしは反可換である。

Dirac 場の Feynman 伝播関数は，フェルミオンの場合の T 積

$$\mathrm{T}\psi(x)\bar{\psi}(y) \equiv \theta(x^0-y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y)-\theta(y^0-x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x) \qquad (43)$$

(第 2 項の負号に注意) の真空期待値で定義される。これも，完全性 (20) を使い，スカラー場の場合と同様にして，次式を得る：

$$\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = (i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\Delta_F(x-y) \equiv S_F(x-y),$$
$$S_F(x) = \int\frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{\not{p}+m}{m^2-p^2-i\epsilon}e^{-ipx} = \int\frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{e^{-ipx}}{m-\not{p}-i\epsilon}. \qquad (44)$$

この Feynman 伝播関数 S_F は Dirac 演算子の逆である：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)S_F(x) = i\delta^4(x).$$

2-3 パリティ変換と Weyl 場

パリティ変換　ここで Dirac 場 $\psi(x)$ の，空間反転

$$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}) \longrightarrow x_{\mathrm{P}}^\mu \equiv (t, -\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

の下での変換の仕方，すなわちパリティ変換 $\mathcal{P}$ を述べておくのが適当であろう。まず $\psi(x)$ は，(A, B) スピンが $(0, 1/2)$ の点なしスピノール $\xi_\alpha(x)$ と，$(1/2, 0)$ の点付きスピノール $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ とから成っていたことを思い起こそう。次に，角運動量演算子 $\boldsymbol{J}=(M_{23}, M_{31}, M_{12})$ は空間添字が二つ付いた量であるから (あるいは $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ のような表式から想像できるように) $\mathcal{P}$ 変換で符号を変えない。一方，ブースト演算子 $\boldsymbol{K}=(M_{10}, M_{20}, M_{30})$ は，空間添字が一つであるから $\mathcal{P}$ 変換で符号を変える。すなわち，$\mathcal{P}$ 変換は

$$\mathcal{P}\boldsymbol{J}\mathcal{P}^{-1} = \boldsymbol{J}, \qquad \mathcal{P}\boldsymbol{K}\mathcal{P}^{-1} = -\boldsymbol{K} \qquad (2)$$

となるようなものとして定義しなければならない。1-2 で導入した $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ スピンは $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{J}+i\boldsymbol{K})/2$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{J}-i\boldsymbol{K})/2$ であったから，(2) より

$$\mathcal{P}\boldsymbol{A}\mathcal{P}^{-1} = \boldsymbol{B}, \qquad \mathcal{P}\boldsymbol{B}\mathcal{P}^{-1} = \boldsymbol{A}. \qquad (3)$$

それゆえ，$\mathcal{P}$ 変換の下では，$(0, 1/2)$ 表現のスピノール $\xi_\alpha(x)$ と $(1/2, 0)$ 表現の $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ とはお互いに入れ換わる；すなわち，

$$\mathcal{P}\xi_\alpha(x)\mathcal{P}^{-1} = \eta^{\dot{\alpha}}(x_{\mathrm{P}}), \qquad \mathcal{P}\eta^{\dot{\alpha}}(x)\mathcal{P}^{-1} = \xi_\alpha(x_{\mathrm{P}}) \qquad (4)$$

なるスピノールの $\mathcal{P}$ 変換則を得る。ここで，スピノールの添字の上下が起こっているのは，スピン $\boldsymbol{J}$ の $\mathcal{P}$ 不変性から理解できる。すなわち，1-2 (18), (24) で見たように ξ_α の上で $\boldsymbol{J}$ は行列 $\boldsymbol{\sigma}/2$ で表現されているが，下付きの点付きスピノール $\eta_{\dot{\alpha}} \sim (\xi_\alpha)^*$ の上では，$-\boldsymbol{\sigma}^*/2$ で表現されており，合

わない。ところが，添字を上げて $\eta^{\dot\alpha}\equiv\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta}$ にすれば，その上での $\boldsymbol{J}$ の表現は

$$\epsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*/2)\epsilon^{-1}=\boldsymbol{\sigma}/2 \qquad (5)$$

とちょうど ξ_α 上での表現と一致するので，$\boldsymbol{J}$ を変えない $\mathcal{P}$ 変換は，(4) のように，下付きの ξ_α と上付きの $\eta^{\dot\alpha}$ との間の変換でなければならないのである。(4) の変換を 4 成分 Dirac 場で書けば

$$\mathcal{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}=\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t). \qquad (6)$$

両辺の hermite 共役をとり $i\gamma_2$ を掛けて，反粒子場 $\psi_{反}=i\gamma_2\psi^*=C\bar\psi^T$ に対する $\mathcal{P}$ 変換を求めれば†，

$$\mathcal{P}\psi_{反}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}=-\gamma_0\psi_{反}(-\boldsymbol{x},t) \qquad (7)$$

となる。(6) と (7) で相対的に右辺の符号が逆であることが重要である。(絶対的な符号は意味がない。例えば (6) の右辺にマイナスを付けたものを $\mathcal{P}$ 変換の定義としておいても，ψ と $\psi_{反}$ のどちらを粒子場，反粒子場と呼ぶか，呼び方だけの問題に解消する。) このことは，**Dirac 場の粒子と反粒子は必ず逆の内部パリティを持つ**ことを意味している。

これを，もっとはっきり見るために，$\mathcal{P}$ 変換 (6) に展開式 2-2 (12) を代入し，生成・消滅演算子に対する変換式に書き直そう。$u(\boldsymbol{p},s)$ の s をヘリシティ固有値の添字としておけば，$\gamma_0 u(-\boldsymbol{p},s)$ は，2-2 (10), (21) から

$$(\not p-m)\gamma_0 u(-\boldsymbol{p},s)=0, \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\gamma_0 u(-\boldsymbol{p},s)=-s\gamma_0 u(-\boldsymbol{p},s), \qquad (8)$$

が出るので，$u(\boldsymbol{p},-s)$ と同じ方程式を満たす。それゆえ，解 $u(\boldsymbol{p},-1)$ の，$u(\boldsymbol{p},+1)$ に相対的な位相のとり方の任意性を，$u(\boldsymbol{p},-1)=\gamma_0 u(-\boldsymbol{p},+1)$ ととることで固定することにすれば，

$$\gamma_0 u(-\boldsymbol{p},-s)=u(\boldsymbol{p},s) \qquad (9)$$

を得，$v(\boldsymbol{p},s)$ に関しては，$v(\boldsymbol{p},s)\equiv i\gamma_2 u^*(\boldsymbol{p},s)$ の定義より，

$$-\gamma_0 v(-\boldsymbol{p},-s)=v(\boldsymbol{p},s) \qquad (10)$$

を得る。(9), (10) を使えば，$\mathcal{P}$ 変換 (6) が

$$\mathcal{P}b(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1}=b(-\boldsymbol{p},-s), \qquad \mathcal{P}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1}=-d(-\boldsymbol{p},-s) \qquad (11)$$

を導くことが容易にわかる。(11) の右辺の d の前の負号が，反粒子 d の内部パリティが -1 であることをあらわに表している。(11) の右辺の前の係数を内部パリティと呼ぶのは，その粒子が軌道角運動量 l の状態にあったとき，全体のパリティ量子数は，$\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ による軌道部分からの寄与 $(-)^l$

---

† $\mathcal{P}$ がユニタリー変換であること，$\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{P}^{-1}$，を使った。

と内部パリティの値との積で与えられるからである。

上の事実からすぐ従う一つの重要な結論は，Dirac 粒子と反粒子の S 波 ($l=0$) の結合状態は，内部パリティが奇 $(-)$ のボーズ粒子として現れるということである。合成スピン J は 0 と 1 が可能だから，このボーズ粒子は，$J^P=0^-$ の擬スカラー粒子か，$J^P=1^-$ の (真性) ベクトル粒子となる。これは，現実に存在する π 中間子などの擬スカラーボソンと，ρ 中間子などのベクトルボソンとが，より基本的な Dirac 粒子と反粒子の S 波基底結合状態であるとする複合模型の考え方の一つの理論的根拠となった。現在のクォーク模型では，この基本的 Dirac 粒子をクォークと呼ぶ。

Weyl 場　ニュートリノのような零質量 $m=0$ の粒子の場合は，ξ と η の遷移を起こす Dirac 質量項 $m\bar{\psi}\psi=m(\xi^\dagger\eta+\eta^\dagger\xi)$ が存在しない。それゆえ，ξ と η が両方とも存在する必要はなく，片方の二成分場 ξ または η のみで記述される。このような零質量二成分場を Weyl 場という。$\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ の場合を考えることにすれば，その自由場 Lagrangian 密度は，**1-5** (5) より

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}\eta^\dagger\sigma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\eta=\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi_{\mathrm{L}} \tag{12}$$

である。ここに ψ_{L} は **1-5** (22) で定義した左手型成分 $(1-\gamma_5)\psi/2=(0,\eta^{\dot{\alpha}})^T$ である。Dirac 場の Lagrangian は容易に確かめられるように $\mathcal{P}$ 変換で不変であるが，(12) の Weyl 場の Lagrangian $\int d^3x\ \mathcal{L}$ は，ξ 成分を持たず，明らかにパリティ不変性を破っている。荷電共役変換 $\mathcal{C}$ も ξ と η を交換するので破れている。しかし $\mathcal{C}$ と $\mathcal{P}$ を結合した $\mathcal{CP}$ 変換

$$\mathcal{CP}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=\gamma_0 C\,\bar{\psi}^T(-\boldsymbol{x},t) \tag{13}$$

は，η 成分 (または ξ 成分) のみで閉じた変換で，

$$\begin{aligned}\mathcal{CP}\eta^{\dot{\alpha}}(x)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}&=\eta^{*\beta}(x_{\mathrm{P}})\,\epsilon_{\beta\alpha},\\ \mathcal{CP}\xi_\alpha(x)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}&=\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\xi^*{}_{\dot{\beta}}(x_{\mathrm{P}})\end{aligned} \tag{14}$$

$[x_{\mathrm{P}}\equiv(-\boldsymbol{x},t)]$ となる。η の Fermi 統計性 (または Grassmann 数性) に注意すれば，(12) の系の Weyl Lagrangian が (14) の $\mathcal{CP}$ 変換で不変であることも容易に確かめられる。

さて，この Weyl 場の運動方程式，正準交換関係は

$$i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,\partial_\mu\eta^{\dot{\beta}}=0 \qquad \sigma_\mu=(1,\boldsymbol{\sigma}) \tag{15}$$

$$\{\eta(\boldsymbol{x},t),\eta^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{16}$$

である。運動方程式 (15) の平面波正エネルギー解 $u(\boldsymbol{p})e^{-ipx}$ ($p_0=+\sqrt{\boldsymbol{p}^2}$)

は

$$(p_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u(\boldsymbol{p})=0 \tag{17}$$

を満たす。2×2 行列 $p_0+\boldsymbol{p}\cdot\sigma$ は rank が 1 で，これには唯一つ解がある。今，零質量で $p_0=|\boldsymbol{p}|$ であるから，(17) は

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})u(\boldsymbol{p})=-u(\boldsymbol{p}), \tag{18}$$

すなわち，この粒子がヘリシティ -1 の左巻きスピンを持つことを意味している。カイラリティー γ_5 が -1 の**左手型 (left-handed) Weyl スピノール $\psi_L\sim\eta^{\dot{\alpha}}$ で記述される零質量粒子は左巻きスピンを持つ**，ということである。

この Weyl 粒子の反粒子場は，$\mathcal{C}$ 不変性が存在しないので，$\mathcal{C}\mathcal{P}$ 変換を用いて次式で定義する (すなわち $\mathcal{C}\mathcal{P}$ 変換がむしろ今の場合の粒子-反粒子変換なのである)†：

$$\begin{aligned}\eta_{反}(\boldsymbol{x},t)&\equiv\mathcal{C}\mathcal{P}\eta(-\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}\\&=-i\sigma^2\eta^*(\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{19}$$

この反粒子場は，(15) の複素共役 $(\partial_0-\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\nabla)\eta^*=0$ より

$$i(\partial_0-\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\nabla\sigma^2)\eta_{反}(x)=0 \tag{20}$$

を満たす。したがって，反粒子場の正エネルギー解 $u_{反}(\boldsymbol{p})e^{-ipx}$ は，$\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\sigma_2=-\boldsymbol{\sigma}$ に注意して

$$(p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u_{反}(\boldsymbol{p})=0 \longrightarrow (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})u_{反}(\boldsymbol{p})=+u_{反}(\boldsymbol{p}) \tag{21}$$

を満たすことがわかる。すなわち，反粒子はヘリシティが $+1$，右巻きスピンを持つ。実際，ニュートリノは左巻きスピンを，反ニュートリノは右巻きスピンを持つことが確認されている。

Weyl 場 $\eta(x)$ や $\eta_{反}(x)$ の負エネルギー解は，それぞれ $(-p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})v(\boldsymbol{p})=0$, $(-p_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})v_{反}(\boldsymbol{p})=0$ を満たすものであるが，$u_{反}(\boldsymbol{p}), u(\boldsymbol{p})$ の $\mathcal{C}\mathcal{P}$ 変換

$$v(\boldsymbol{p})=i\sigma_2 u_{反}{}^*(\boldsymbol{p}), \qquad v_{反}(\boldsymbol{p})=-i\sigma_2 u^*(\boldsymbol{p}) \tag{22}$$

をとることにする。$u^\dagger(\boldsymbol{p})u(\boldsymbol{p})=2p_0$ の規格化条件の下で，

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{p})u^\dagger(\boldsymbol{p})&=v(\boldsymbol{p})v^\dagger(\boldsymbol{p})=p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\u_{反}(\boldsymbol{p})u_{反}{}^\dagger(\boldsymbol{p})&=v_{反}(\boldsymbol{p})v_{反}{}^\dagger(\boldsymbol{p})=p_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{aligned} \tag{23}$$

や，$v^\dagger(-\boldsymbol{p})u(\boldsymbol{p})=0$ などが従い，$\eta(x)$，$\eta_{反}(x)$ は次の展開式を持つ：

---

† 反粒子の存在がいえるためには，最終的には，$\mathcal{C}$ 不変性も $\mathcal{C}\mathcal{P}$ 不変性も要らず，$\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{T}$ 不変性のみでよい。

$$\eta(x)=\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\{b(\boldsymbol{p})u(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+d^\dagger(\boldsymbol{p})v(\boldsymbol{p})e^{ipx}\},$$
$$\eta_{反}(x)=\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\{d(\boldsymbol{p})u_{反}(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+b^\dagger(\boldsymbol{p})v_{反}(\boldsymbol{p})e^{ipx}\}. \tag{24}$$

これらの生成・消滅演算子の交換関係は，(16) より，

$$\{b(\boldsymbol{p}), b^\dagger(\boldsymbol{q})\}=\{d(\boldsymbol{p}), d^\dagger(\boldsymbol{q})\}=\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}), \tag{25}$$

その他はすべて反可換である。

また，$u(-\boldsymbol{p})$ は，反粒子の正エネルギー解の方程式 (21) を満たすので，$u_{反}(\boldsymbol{p})$ の位相の任意性を

$$u_{反}(\boldsymbol{p})=u(-\boldsymbol{p}) \tag{26}$$

が成り立つように固定することにする。そうすれば $\mathcal{CP}$ 変換 (14) は，生成・消滅演算子に対して次の変換となる：

$$\mathcal{CP}b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=d^{(\dagger)}(-\boldsymbol{p}),$$
$$\mathcal{CP}d^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=b^{(\dagger)}(-\boldsymbol{p}). \tag{27}$$

2-4 時間反転不変性と CPT 定理

ここまで，$\mathcal{C}$ や $\mathcal{P}$ のような離散対称性が出てきたので，ここで離散的対称性についてまとめておこう。最後に，任意の局所相互作用系が，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{P}$ と時間反転 $\mathcal{T}$ を同時に行う変換 $\mathcal{CPT}$ に対して不変であることを証明しよう。

荷電共役変換 $\mathcal{C}$　これは，Dirac 場 $\psi(x)$ に対しては，2-2 (33) で与えた通り

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1}=C\,\bar{\psi}^T(x). \tag{1}$$

このとき，1-5 (32), (33) の C 行列の性質を用いれば

$$\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}=(C\gamma_0{}^T\psi^*)^\dagger\gamma_0=\psi^T C^{-1}C\gamma_0{}^T C^\dagger\gamma_0=-\psi^T(x)\,C^{-1} \tag{2}$$

となるから，双一次形式 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ $(\Gamma=1, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu})$ は†

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\bar{\psi}\Gamma\psi\mathcal{C}^{-1}&=\mathcal{C}\bar{\psi}\mathcal{C}^{-1}\Gamma\,\mathcal{C}\psi\mathcal{C}^{-1}=-\psi^T C^{-1}\Gamma C\bar{\psi}^T\\&=\bar{\psi}(C^{-1}\Gamma C)^T\psi\\&=\begin{cases}+\bar{\psi}\Gamma\psi & \Gamma=1, i\gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu \text{ のとき}\\ -\bar{\psi}\Gamma\psi & \Gamma=\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} \text{ のとき}\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

† 付録 A (10) の公式参照。

と変換する。ただし, ψ と $\bar{\psi}$ の順序変更の際 Fermi 統計から出る負号を考慮した。さらにその際 $\{\psi, \bar{\psi}\}=\gamma_0\delta$ からくる, $\mathrm{tr}(\gamma_0 C^{-1}\Gamma C)=-\mathrm{tr}(\gamma_0\Gamma)$ に比例する無限大の c 数項については, $\Gamma=\gamma_\mu$ のときのみ存在することに注意し, 初めのベクトル・カレント $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ を **2-2** の (32) で述べたように反対称化した $(1/2)[\bar{\psi}, \gamma^\mu\psi]$ にとっておくものとしておけば, 現れない。以下 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ と書けばその意味に理解しておく。

中性スカラー場 ϕ は $\mathcal{C}$ 不変, 荷電スカラー場 φ, φ^* は $\mathcal{C}$ で互いに移りかわる:

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1}=\phi(x),$$
$$\mathcal{C}\varphi(x)\mathcal{C}^{-1}=\varphi^*(x), \qquad \mathcal{C}\varphi^*(x)\mathcal{C}^{-1}=\varphi(x). \tag{4}$$

カレント $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ に結合するベクトル場 A_μ (電磁場) は, (3)を考慮して

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1}=-A_\mu(x) \tag{5}$$

と定義する。ただし, (4), (5) の変換則は, 必ずしも一般的なものではなく, **1-5** (14) で与えた QED のような系を念頭においたものであることに注意しておこう。**5** 章で詳しく議論する Yang-Mills 場の系の場合は, Dirac 場が何種類か $(\psi_1, \psi_2, \cdots)=(\psi_i)$ あり, Yang-Mills 場 A^a_μ は, Dirac 場と

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} \propto \sum_a A^a_\mu \bar{\psi}^i (T^a)_i{}^j \gamma^\mu \psi_j \tag{6}$$

の形で結合している。[T^a はゲージ群 G の生成子の表現行列 (hermite) である (**5-1** 参照)。] この場合, カレント $\bar{\psi}T^a\gamma_\mu\psi$ の $\mathcal{C}$ 変換は, (3)と同様にして

$$\mathcal{C}\bar{\psi}T^a\gamma_\mu\psi\mathcal{C}^{-1}=-\bar{\psi}(T^a)^T\gamma_\mu\psi \tag{7}$$

となるから, Yang-Mills 場 A^a_μ の変換は, (6) の相互作用項を $\mathcal{C}$ 不変にするため, 行列表記 $A_\mu=[(A_\mu)_i{}^j\equiv\sum_a A^a_\mu(T^a)_i{}^j]$ を用いて

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1}=-A^T_\mu(x) \qquad (A_\mu\equiv\sum_a A^a_\mu T^a) \tag{8}$$

とすべきであることがわかる。軸性ベクトル結合 $\sum_a A^a_\mu\bar{\psi}T^a\gamma_5\gamma^\mu\psi$ の場合は, 右辺の符号を逆にすべきことも注意しておこう。同様に, $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\propto\sum_a\phi^a\bar{\psi}T^a\psi$ の湯川型相互作用をするスカラー場 ϕ^a の場合だと, その $\mathcal{C}$ 変換は, 行列記法で

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1}=+\phi^T(x) \qquad (\phi\equiv\sum_a\phi^a T^a) \tag{9}$$

で与えられる。

パリティ変換 $\mathcal{P}$ Dirac 場の $\mathcal{P}$ 変換は, **2-3** (6) で与えたように

$$\mathcal{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}=\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t) \tag{10}$$

と定義される。ベクトル場 A_μ の場合は，空間反転で空間成分 A_k $(k=1,2,3)$ のみが符号を変えるから，反変ベクトル A^μ となる：

$$\mathcal{P}A_\mu(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}=A^\mu(-\boldsymbol{x},t). \tag{11}$$

軸性ベクトル場の場合は，もちろん，右辺が逆符号となる。スカラー，擬スカラー場の場合は

$$\mathcal{P}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{P}^{-1}=\pm\phi(-\boldsymbol{x},t)$$
$$(+：スカラー，\ -：擬スカラー). \tag{12}$$

時間反転 $\mathcal{T}$　この変換については，今まで述べなかったから少し説明が必要だろう。時間反転 $\mathcal{T}$ とはもちろん $(t,\boldsymbol{x})\to(-t,\boldsymbol{x})$ の変換であるが，量子論においては，たとえ Hamiltonian H が $\mathcal{T}$ 不変，$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1}=H$，であっても，その運動方程式は一見不変でないように見える；例えば，Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle=H|\Phi(t)\rangle \tag{13}$$

を考えると，その両辺に $\mathcal{T}$ 演算を施し，$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1}=H$ を用いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle=\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle=H\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle \tag{14}$$

が得られるように思える。しかし，これでは“時間反転”したはずの状態 $\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle$ が，時間 t の順方向のもとの運動方程式 (13) と同じ方程式を満たし，欲しい形

$$i\frac{\partial}{\partial(-t)}\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle=H\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle \tag{15}$$

になっていない。この“欠陥”は，しかし，$\mathcal{T}$ 演算子を**反ユニタリー** (anti-unitary) 演算子と考えることによりすぐ克服できる。反ユニタリー演算子とはユニタリーな反線形演算子 (anti-linear operator) のことで，反線形演算子 $\mathcal{T}$ とは次の性質を持つ演算子のことをいう：

i) (反線形性)

$$\mathcal{T}(\alpha|A\rangle+\beta|B\rangle)=\alpha^*\mathcal{T}|A\rangle+\beta^*\mathcal{T}|B\rangle \qquad (\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}) \tag{16}$$

ii) (hermite 共役 $\mathcal{T}^\dagger$ の定義)

$$\langle A|\mathcal{T}^\dagger|B\rangle=\langle\mathcal{T}A|B\rangle^*. \tag{17}$$

ユニタリー性はもちろん $\mathcal{T}^\dagger=\mathcal{T}^{-1}$ であるが，反線形演算子の hermite 共役 $\mathcal{T}^\dagger$ の意味は，通常の線形演算子 $\mathcal{O}$ の場合の $\langle A|\mathcal{O}^\dagger|B\rangle=\langle\mathcal{O}A|B\rangle$ と少し

異なり (17) で与えられていることに注意しておこう。$\mathcal{T}$ が反線形演算子だとすれば，(13) の左辺 $i(\partial/\partial t)|\Phi\rangle$ に $\mathcal{T}$ を演算したとき，(16) の性質により，c 数係数 i の複素共役がとられ，望み通り

$$\mathcal{T}\left(i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle\right)=-i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle=i\frac{\partial}{\partial(-t)}\mathcal{T}|\Phi(t)\rangle \tag{18}$$

が得られるのである。

任意の反線形演算子 $\mathcal{T}$ は，通常の線形演算子 $\mathcal{O}$ と，すべての c 数を複素共役に変える演算子 K との積として理解することもできる：

$$\mathcal{T}=K\mathcal{O},\qquad \mathcal{T}^\dagger=\mathcal{O}^\dagger K \tag{19}$$

実際，演算子 K がそれより右にある c 数をすべて複素共役に変え，$K^2=1$ であることに注意すれば，(19) の形の $\mathcal{T},\mathcal{T}^\dagger$ が (16),(17) の性質を満たすことがすぐいえる。例えば (17) の性質は次のように示せる：

$$\begin{aligned}\langle A|\mathcal{T}^\dagger|B\rangle&=\langle A|\mathcal{O}^\dagger K|B\rangle=\langle\mathcal{O}A|K|B\rangle\\&=K(\langle\mathcal{O}A|K|B\rangle^*)=K(\langle KB|\mathcal{O}|A\rangle)\\&=\langle B|K\mathcal{O}|A\rangle=\langle B|\mathcal{T}A\rangle=\langle\mathcal{T}A|B\rangle^*.\end{aligned} \tag{20}$$

さて，Dirac 場の $\mathcal{T}$ 変換性を決めるため，少なくとも自由 Dirac 場の作用積分は $\mathcal{T}$ 不変になるよう，2-2 (1) の Lagrangian 密度が

$$\mathcal{T}\mathcal{L}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=\mathcal{L}(\boldsymbol{x},-t) \tag{21}$$

を満たすこと，すなわち

$$\begin{aligned}&\psi^\dagger(\boldsymbol{x},-t)\gamma_0\{i\gamma^0[\partial/\partial(-t)]+i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m\}\psi(\boldsymbol{x},-t)\\&\quad=\mathcal{T}\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}\gamma_0{}^*(-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu-m)\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}\end{aligned} \tag{22}$$

が成立することを要求し，$\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=\Gamma_{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{x},-t)$ の形を仮定する。そうすれば，(22)（と $\mathcal{T}$ のユニタリー性）の要請より，4×4 行列 Γ_{T} は，$(\gamma_0{}^*,\gamma_1{}^*,\gamma_2{}^*,\gamma_3{}^*)=(\gamma_0,\gamma_1,-\gamma_2,\gamma_3)$ となる γ 行列の表示では，

$$\Gamma_{\mathrm{T}}{}^\dagger(1,\gamma^0,-\gamma^1,\gamma^2,-\gamma^3)\,\Gamma_{\mathrm{T}}=(1,\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3) \tag{23}$$

を満たさねばならない。これを満たす Γ_{T} は，位相因子 $e^{i\theta}$ の不定性を除き $\gamma^1\gamma^3$ と決まるから，ψ の $\mathcal{T}$ 変換として

$$\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=i\gamma^1\gamma^3\psi(\boldsymbol{x},-t) \tag{24}$$

を得る。位相の不定性は $\Gamma_{\mathrm{T}}{}^2=1$ となるように選んだ。

Klein-Gordon Lagrangian に対して同様に (21) の要請をすれば，実スカラー場 ϕ の $\mathcal{T}$ 変換性は

$$\mathcal{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=\pm\phi(\boldsymbol{x},-t) \tag{25}$$

と決まる。符号は任意であるが，もしいくつかの実スカラー場の組 $\{\phi_a\}$ が

あって，$\mathcal{C}$ 変換のところで議論したような湯川型相互作用 $\phi^a\bar{\psi}T^a\psi$ または $\phi^a\bar{\psi}i\gamma_5T^a\psi$ をしている場合には，その $\mathcal{T}$ 不変性 (21) を要求すれば，ϕ^a 間の相対的符号が決まり，行列記法の ϕ および成分場 ϕ^a に対し

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=\pm\phi(\boldsymbol{x},-t)\ \ (\phi\equiv\sum_a\phi^aT^a)\\&\mathcal{T}\phi^a(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=\pm\epsilon_a\phi^a(\boldsymbol{x},-t)\ \ (T^{a*}=\epsilon_aT^a(\epsilon_a=\pm1)\text{ に対し})\end{aligned}\tag{26}$$

となる。負号は擬スカラー結合の場合である。

ベクトル場の場合も，一般に Yang-Mills 場のような多重項 $\{A_\mu^a\}$ になっている場合でいえば，運動項 $\propto(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2$ や，(6) の相互作用項に対して $\mathcal{T}$ 不変性の要求 (21) をおいて，次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}A^\mu(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}&=(A_0,-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x},-t)\\&=A_\mu(\boldsymbol{x},-t)\qquad(A_\mu\equiv\sum_aA_\mu^aT^a).\end{aligned}\tag{27}$$

CPT 定理 以上の $\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{T}$ 変換のそれぞれは，系の対称性である場合もあれば，そうでない場合もある。しかし，それら三つを続けて行う $\mathcal{CPT}$ **変換は，局所相互作用をしている Lorentz 不変な系である限り常に系の対称性となる。**これを一般的に示そう。

今，一般に系が種々な階数の実 テンソル 場 $\phi^a_{\mu_1\cdots\mu_n}$ (擬テンソルも区別しない) および種々な (1階) スピノール場 ψ_i から成っているとし，それらの $\mathcal{CPT}$ 変換を

$$\mathcal{CPT}\phi^a_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=(-)^n\phi^a_{\mu_1\cdots\mu_n}(-x),\tag{28}$$

$$\mathcal{CPT}\psi_i(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=-i\gamma_5\gamma_0\bar{\psi}_i{}^T(-x)\tag{29}$$

で定義する。上で議論したスカラー，擬スカラー，ベクトル，軸性ベクトルのボソン場の場合には，どの場合も，上の $\mathcal{C},\mathcal{P},\mathcal{T}$ 変換の合成変換 $\mathcal{CPT}$ が (28) のテンソル場変換則にまとまることを確かめるのは容易である†。ψ が Dirac 場の場合，変換則 (29) は，(1)，(10)，(24) から従う。ψ をわざわざスピノール場と呼んだのは，Dirac 場でなく Majorana 場でも (したがって，Majorana 場の形に常に直せる Weyl 場でも) よいからである。実際，Dirac 場の場合の (29) (の hermite 共役) を用いて荷電共役場 $\psi^C\equiv C\bar{\psi}^T$ の $\mathcal{CPT}$ 変換則を求めれば，(29) と同じになり，したがって，Majorana 場 $\psi_M=(\psi+\psi^C)/2$ の変換則も (29) で与えられるのである。(28) では，任意のテンソル場としたので，重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ などが含まれていてよい。(29) では

---

† 符号の任意性がまだ残っている場合もあるが，その場合には (28) になる方を選ぶことにする。

1階スピノール場 ψ_i のみとしたが，実は，Rarita-Schwinger 場 ψ_μ のような任意のテンソル-スピノール場を含んでいてもよいことが，以下の証明からわかるだろう。

局所相互作用の仮定から，系の作用積分は，局所的 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(x)$ の積分で与えられるから，$\mathcal{CPT}$ 不変性を証明するには

$$\mathcal{CPT}\mathcal{L}(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{L}(-x) \tag{30}$$

をいえばよい。もしこうなら作用積分 $\int dx\,\mathcal{L}(x)$ が不変になるからである。また，Lorentz 不変性の要求から $\mathcal{L}$ はスカラーでなければならない。Lorentz スカラーの $\mathcal{L}$ をつくるためには，スピノール場 ψ_i は必ず双一次形式でいったんテンソルをつくってから，他のテンソルと Lorentz の足を縮約していなければならない。それゆえ，まず，ψ_i の**実**双一次形式 $\bar{\psi}\Gamma T\psi \equiv \bar{\psi}^i\Gamma(T)_i{}^j\psi_j$ ($T^\dagger=T$, $\Gamma=1, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$) の $\mathcal{CPT}$ 変換性を見よう：

$$\begin{aligned}\mathcal{CPT}\bar{\psi}(x)\Gamma T\psi(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}&\\ &=\psi^T(-x)\,i\gamma_5\gamma_0\,\Gamma^*T^*(-i\gamma_5\gamma_0)\,\bar{\psi}^T(-x)\\ &=-\bar{\psi}(-x)(\gamma_0\gamma_5)T^\dagger\Gamma^\dagger(\gamma_0\gamma_5)\,\psi(-x)\\ &=+\bar{\psi}(-x)\,T\gamma_5\Gamma\gamma_5\,\psi(-x).\end{aligned} \tag{31}$$

ここで，$\gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0=\Gamma$ [付録 A (9)] および，$\mathcal{C}$ の場合と同じく ψ の Fermi 統計，$\Gamma=\gamma_\mu$ のとき $\bar{\psi}\gamma_\mu T\psi\equiv(1/2)[\bar{\psi},\gamma_\mu T\psi]$ の意味であること，を用いた。(31) の変換性は，Γ のテンソル階数を n とすれば，$\gamma_5\Gamma\gamma_5=(-)^n\Gamma$ であるから，ψ の双一次形式で構成した実テンソル $\bar{\psi}\Gamma T\psi$ も，通常の実テンソル場 $\phi_{\mu_1\cdots\mu_n}$ と同じ (28) の $\mathcal{CPT}$ 変換性を持つことを示している。

他にベクトル添字を担うものとして微分 ∂_μ があるが，任意の場 $\varphi(x)$ に対して $(\partial/\partial x^\mu)\varphi(-x)=-[\partial/\partial(-x^\mu)]\varphi(-x)=-(\partial_\mu\varphi)(-x)$ であるから，$\partial_\mu\psi$ や $\partial_\mu\phi_{\mu_1\cdots\mu_n}$ のように ∂_μ を掛けて階数を上げて構成したテンソル場も，すべて，(28) の $\mathcal{CPT}$ 変換則を満たす。したがってもし，もともと系がテンソル-スピノール場 $\psi_{\mu_1\cdots\mu_n}$ を含んでいたとしても，

$$\mathcal{CPT}\psi_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=-(-)^n i\gamma_5\gamma_0\,\bar{\psi}^T_{\mu_1\cdots\mu_n}(-x) \tag{32}$$

なる $\mathcal{CPT}$ 変換則を付与しておけばよい。

時間発展がユニタリー(確率保存)であるためには，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(x)$ は hermite でなければならない。hermite でスカラーの $\mathcal{L}(x)$ は，必ず ψ およびその微分 $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_n}\psi$ からつくった実双一次形式のテンソルや，

実テンソル場 $\phi_{\mu_1\cdots\mu_n}$ およびその微分，の間でテンソルの足を縮約してつくられるから，そして，それらのテンソルはすべて (28) の変換則に従うから，$\mathcal{L}$ 自身も $n=0$ の (28) の変換則に従う。しかし，これは証明したかった (30) に他ならない。(証明終)

反粒子の存在と性質 任意の保存するテンソル・カレント $j_{\mu_1\cdots\mu_n}{}^{\mu}(x)$ $(\partial_\mu j_{\mu_1\cdots\mu_n}{}^{\mu}=0)$ も，もちろん (28) の $\mathcal{CPT}$ 変換則を満たす。それゆえ保存テンソル電荷 $Q_{\mu_1\cdots\mu_n}=\int d^3x\ j_{\mu_1\cdots\mu_n}{}^{\mu=0}(x)$ は

$$\mathcal{CPT}Q_{\mu_1\cdots\mu_n}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=(-)^{n+1}Q_{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{33}$$

を満たす。特にエネルギー・運動量 P_μ は $\mathcal{CPT}$ 不変であり，4 次元角運動量 $M_{\mu\nu}$ は符号を変える：

$$\mathcal{CPT}P_\mu\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=P_\mu,\qquad \mathcal{CPT}M_{\mu\nu}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=-M_{\mu\nu}. \tag{34}$$

したがって，ある 1 粒子状態 $|1\rangle$ が存在すれば，必ず $\mathcal{CPT}|1\rangle$ なる状態が存在する。後者の状態は，(34) により，もとの粒子 $|1\rangle$ と，同じ質量，同じ運動量，そして，大きさが同じで逆向きのスピンを持ち，かつ，電磁場の電荷のようなスカラー電荷 Q は，(33) により，すべて逆符号の量子数を持つ。この状態 $\mathcal{CPT}|1\rangle$ は，まさに $|1\rangle$ の反粒子状態であり，したがって CPT 定理により粒子には必ず反粒子が伴うことがいえるのである。

演 習 問 題 2.

2.1 2-1 (13) および 2-2 (24) を確かめよ。

2.2 複素スカラー場に対する P^μ, Q の表式 2-1 (37), (38), および Dirac 場に対する P^μ, Q の表式 2-2 (27), (32) を計算して確かめよ。

2.3 2-2 (37) より (38) の表式を導け。さらに，付録 A に与えた標準表示での平面波解 $u(\boldsymbol{p},s)$, $v(\boldsymbol{p},s)$ のあらわな表式 (A.21) を使って，特に，角運動量演算子 $\boldsymbol{J}\equiv(M_{23}, M_{31}, M_{12})$ が

$$\boldsymbol{J}=\int d^3p\,\{\sum_s(b^\dagger(\boldsymbol{p},s)\boldsymbol{L}b(\boldsymbol{p},s)+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)\boldsymbol{L}d(\boldsymbol{p},s))$$
$$+\sum_{s,s'}(b^\dagger(\boldsymbol{p},s)\boldsymbol{S}_{ss'}b(\boldsymbol{p},s')+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)\boldsymbol{S}_{ss'}d(\boldsymbol{p},s'))\}$$

$$\boldsymbol{L}\equiv i\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{p}\right),\qquad (\boldsymbol{S})_{ss'}\equiv\chi^{\dagger(s)}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\chi^{(s')}$$

と書けることを示せ。ただし，$\chi^{(s)}$ は，z 軸方向スピンの 2 倍 σ_3 の固有状態を表す二成分波動関数で，付録 A (22) で与えられる。

2.4 Dirac 粒子と反粒子の結合状態 (例えば電子と陽電子から成るポジトロニウム) は，結合エネルギーが小さい場合，近似的に自由粒子，反粒子の生成演算

子 $b^\dagger(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ を用いて次式で表される：

$$|M\rangle=\int d^3p\sum_{s,s'}f(\boldsymbol{p}^2)Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{p}})\sigma_{ss'}b^\dagger(\boldsymbol{p},s)d^\dagger(-\boldsymbol{p},s')|0\rangle.$$

ただし，$Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{p}})$ は $\boldsymbol{p}$ の天頂角 θ，方位角 φ の球関数で，$\sigma_{ss'}$ はスピン部分の波動関数である。このとき，次の問に答えよ。

1） 前問の角運動量 $\boldsymbol{J}$ の表式を用い，$s, s'=\pm1$ が z 軸方向のスピン（の 2 倍）σ_3 の固有状態を意味するとして，上の $|M\rangle$ が，軌道角運動量（$\boldsymbol{L}$ 部分）l，スピン（$\boldsymbol{S}$ 部分）1 または 0 の状態であることを示せ。また，スピン S が 1（3 重項 $S_z=+1, 0, -1$）および 0（1 重項）に対応するスピン部分の波動関数 $\sigma_{ss'}$ を与えよ。

2） $|M\rangle$ にパリティ変換 $\mathcal{P}$ を施して，そのパリティ固有値 P を，l で表せ。

3） $|M\rangle$ に荷電共役変換 $\mathcal{C}$ を施し，その固有値 C を，l, S で表せ。

2.5 超対称性（ボソン・フェルミオン間の対称性）を持つ最も簡単な例は，複素スカラー場 $\varphi(x)$ と右手型 Weyl 場 $\xi_\alpha(x)$ から成る系で，Lagrangian が

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\text{kin.}}+\mathcal{L}_{\text{mass}}+\mathcal{L}_{\text{int.}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}}=\partial_\mu\varphi^\dagger\,\partial^\mu\varphi+i\xi^\dagger\,\bar{\sigma}^\mu\,\partial_\mu\xi+f^\dagger f$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}=m\left(\varphi f+\frac{1}{2}\xi^T\epsilon\xi\right)+\text{h.c.}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int.}}=g(\varphi^2 f+\varphi\xi^T\epsilon\xi)+\text{h.c.}$$

で与えられる。ただし，h.c. は hermite 共役を表し，$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$ や $\epsilon^{\alpha\beta}$ などは 1 章の 2 成分スピノールの記法に従う。$f, f^\dagger$ は運動項（微分）を持たないので，物理的自由度を担わず補助場と呼ばれる。この系に対し次の問に答えよ。

1） この系の，運動項 $\mathcal{L}_{\text{kin.}}$，質量項 $\mathcal{L}_{\text{mass}}$，相互作用項 $\mathcal{L}_{\text{int.}}$ に対応する作用積分は，それぞれ別々に，2 成分スピノール（Grassmann 数）θ_α を変換パラメータとする次の超対称性変換の下で不変であることを示せ：

$$\delta(\theta)\varphi(x)=\theta^T\epsilon\xi(x),$$

$$\delta(\theta)\xi_\alpha(x)=i(\sigma^\mu\epsilon\theta^*)_\alpha\,\partial_\mu\varphi(x)-f(x)\theta_\alpha,$$

$$\delta(\theta)f(x)=i\theta^\dagger\,\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x).$$

2） 変換パラメータが $\theta^1_\alpha, \theta^2_\alpha$ の二つの超対称性変換 $\delta(\theta^1), \delta(\theta^2)$ の交換関係が，任意の場 $\phi(x)=\varphi(x), \xi(x), f(x)$ の上で，

$$[\delta(\theta^1),\delta(\theta^2)]\phi(x)=ia^\mu\,\partial_\mu\phi(x),\qquad a^\mu\equiv\theta^{1\dagger}\,\bar{\sigma}^\mu\theta^2-\theta^{2\dagger}\,\bar{\sigma}^\mu\theta^1$$

となること，すなわち，座標 x^μ を a^μ だけシフトする並進変換となることを示せ。

3） $\mathcal{L}$ において，補助場 $f, f^\dagger$ を運動方程式を用いて消去したとき，得られる Lagrangian の形を求めよ。相互作用項がない（$g=0$）とき，$\varphi(x), \xi(x)$ は，共通の質量 m を持つ複素スカラー粒子および Majorana 粒子を表すことを確かめよ。

3. 相互作用系の一般的性質と S 行列

3-1 スペクトル条件とスペクトル表示

相互作用がある系の場の方程式を解くことは，大変難しいことで，摂動論などのいくつかの近似計算法があるにすぎない。ここでは，それらの近似計算によらずにいえる一般的な事柄を調べよう。

スペクトル条件 一般の相互作用系のエネルギー・運動量 P^μ の固有値の分布（スペクトル）については，もちろん，解いてみなければわからないのだが，相対論的に不変な素粒子論として物理的に意味のある系なら当然満たすべき条件がある。これをスペクトル条件といい，理論に対する要請として，成立していることを仮定する。

i） エネルギー・運動量 P^μ の固有値 p^μ は，すべて“前方光円錐(forward light-cone)”

$$p^2 = p^\mu p_\mu \geqq 0, \qquad p^0 \geqq 0, \tag{1}$$

にある。

ii） このうち，点 $p^\mu=0$ は離散的で縮退のない固有値で，Lorentz 不変な真空 $|0\rangle$ に対応する：

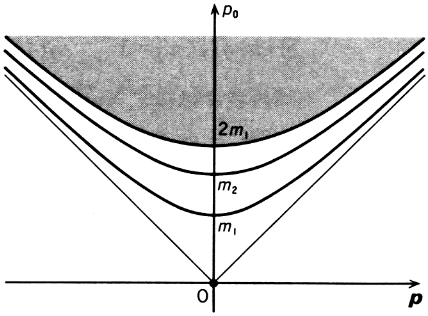
$$P^\mu|0\rangle = 0, \qquad M^{\mu\nu}|0\rangle = 0. \tag{2}$$

iii） いくつかの離散的な正（または 0）の質量値 $0 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq m_3 \leqq \cdots$ の各々に対し，安定な 1 粒子状態 $|\boldsymbol{p}_i(m_i)\rangle$ が存在する：

$$P^\mu|\boldsymbol{p}_i(m_i)\rangle = p_i^\mu|\boldsymbol{p}_i(m_i)\rangle, \qquad p_i^\mu = (\sqrt{\boldsymbol{p}_i^2 + m_i^2},\ \boldsymbol{p}_i). \tag{3}$$

2 粒子以上の状態は $P^2 = P^\mu P_\mu$ の連続固有値に対応し，したがって $p^2 \geqq (2m_1)^2$ の領域では連続スペクトルとなる。

質量が m_1 と m_2 $(0 < m_1 < m_2 < 2m_1)$ の 2 種の粒子がある場合のスペク



3・1 図

トルを 3・1 図に例示した。一般にスペクトル条件と呼ばれるのはここまでである。しかし，我々は，後に詳述するように，さらに漸近的完全性の仮定をおく。この仮定の下では，系の状態空間は，いくつかの (質量 m_1, m_2, $\cdots$ に対応した) **自由**粒子の場の生成演算子を使って張られる Fock 空間と同じものとなり，それゆえ，系の P^μ の固有値は，上のスペクトル条件の iii) よりもっとはっきりと，

$$p^0=\sum_i\sqrt{\boldsymbol{p}_i^2+m_i^2}, \qquad \boldsymbol{p}=\sum_i\boldsymbol{p}_i \tag{4}$$

で与えられることになる。

とにかく，スペクトル条件より，系の状態空間の完全系を

$$|0\rangle\langle 0|+\sum_i\int d^3p_i|\boldsymbol{p}_i(m_i)\rangle\langle\boldsymbol{p}_i(m_i)|+\sum_\lambda\int d^4p|p,\lambda\rangle\langle p,\lambda|=1 \tag{5}$$

の形に書くことができる。ここで第 1 項は真空項，第 2 項は 1 粒子項であり，その i に関する和は，粒子の種類についてと共に，スピン等による縮退があればそれらの自由度についても，和をとることを意味する。第 3 項は 2 粒子状態以上の連続スペクトル部分で，p^μ は 4 元運動量 P^μ の固有値，λ はそれ以外の量子数を表す。(5) を略して

$$\sum_n|n\rangle\langle n|=1, \qquad P^\mu|n\rangle=p_n^\mu|n\rangle, \tag{6}$$

とも書く。(5) や (6) では，正定値計量の規格化 $\langle n|n'\rangle=\delta_{nn'}$，すなわち

$$\begin{aligned}&\langle 0|0\rangle=1, \qquad \langle\boldsymbol{p}(m_i)|\boldsymbol{q}(m_j)\rangle=\delta_{ij}\,\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}),\\&\langle p,\lambda|q,\lambda'\rangle=\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta^4(p-q).\end{aligned} \tag{7}$$

を仮定した。この正定値性 (positivity) の仮定は簡単のためで，もし状態空間が不定計量を持てば，完全系 $\{|n\rangle\}$ は一般には P^μ の固有状態のみでは

張れず，その計量 $\langle n|n'\rangle\equiv\eta_{nn'}$ も対角化できず，完全性の式 (6) は

$$\sum_{n,n'}|n\rangle\eta^{-1}_{nn'}\langle n'|=1 \tag{8}$$

で置き換える必要がある。実際，我々は後に Yang-Mills 場などのゲージ理論において不定計量の状態空間に出会うが，そこでは幸い，$|n\rangle$ はすべて P^μ の固有状態にとれ，計量も $\eta_{nn'}=\pm1\delta_{nn'}$ の形まで対角化できる。以下では (5) ないし (6) の完全性を用いるが，(P^μ の固有状態にとれる限り) (8) の場合への拡張は自明である。

スペクトル表示　一般の相互作用系での，実スカラー場 $\phi(x)$ の場合を簡単のため考える。例えば，Lagrangian 密度が

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\mu_0^2\phi^2)-\frac{\lambda}{4!}\phi^4+\bar{\psi}\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}-m_0\right)\psi+g\bar{\psi}\psi\phi \tag{9}$$

で与えられるような系で，スカラー場 ϕ を考えるのである。

さらに簡単のため，この系のスカラーの量子数を持った安定な 1 粒子状態は，質量 μ の 1 種類しかないとする。(別の量子数を持った粒子，例えば (9) の系だと質量 m のフェルミオン，は存在してもよい。)　このとき，$\phi(x)$ の Heisenberg 運動方程式は一般に次の形に書ける：

$$(\Box+\mu^2)\phi(x)=j(x). \tag{10}$$

例えば，(9) の系での Heisenberg (表示の) 場 $\phi(x)$ の運動方程式は

$$(\Box+\mu_0^2)\phi+\frac{\lambda}{3!}\phi^3=g\bar{\psi}\psi \tag{11}$$

で与えられるから，(10) の形に直せば，右辺の $j(x)$ が

$$j=(\mu^2-\mu_0^2)\phi-\frac{\lambda}{3!}\phi^3+g\bar{\psi}\psi \tag{12}$$

となる場合に相当する。実際のスペクトルに現れる物理的質量 (physical mass) μ と，Lagrangian に現れている裸の質量 (bare mass) μ_0 とは異なることに注意したい。(自己場との相互作用によって質量が裸の値からずれるのである。)

さて，これから $\phi(x)$ の交換関係の真空期待値

$$i\Delta'(x,y)\equiv\langle0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle \tag{13}$$

に対する表式を求めよう。完全性関係 (6) と，P^μ が並進演算子であることから従う **1-3** (34)†，

$$[iP^\mu,\phi(x)]=\partial^\mu\phi(x)\longrightarrow\phi(x)=e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx} \tag{14}$$

---

† この式の時間成分 $\mu=0$ は，ちょうど Heisenberg の運動方程式である。

と，$P^\mu|n\rangle=p_n^\mu|n\rangle$，$P^\mu|0\rangle=0$ とを用いれば

$$\begin{aligned}&\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle\\&\quad=\langle 0|e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}e^{iPy}\sum_n|n\rangle\langle n|\phi(0)e^{-iPy}|0\rangle-(x\leftrightarrow y)\\&\quad=\sum_n|\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2(e^{-ip_n(x-y)}-e^{ip_n(x-y)})\end{aligned}\tag{15}$$

となり，$\Delta'(x,y)$ は差 $x-y$ のみに依存することがわかる。この中間状態 n についての和を，まず，p_n^μ が同じ値 k^μ となるすべての状態について足しあげ，次に，k^μ の値について積分する，というふうにやる。これは形式的に

$$1=\int d^4k\ \delta^4(p_n-k)\tag{16}$$

を (15) に掛けるだけの操作でやれて，(15) は

$$i\Delta'(x-y)=\int d^4k\ (2\pi)^{-3}\rho(k)(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)})\tag{17}$$

$$\rho(k)\equiv(2\pi)^3\sum_n\delta^4(p_n-k)|\langle 0|\phi(0)|n\rangle|^2\tag{18}$$

と書き直される。ところが，$\phi(x)$ がスカラー場であること，

$$\begin{aligned}&U^{-1}(\Lambda)\phi(x')U(\Lambda)=\phi(x),\\&x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\equiv(\Lambda x)^\mu,\\&U(\Lambda)=\exp\left(-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right),\end{aligned}\tag{19}$$

および，$|n\rangle$ を Lorentz 変換した状態 $U(\Lambda)|n\rangle$ が当然 4 元運動量 $P^\mu=(\Lambda p_n)^\mu$ を運ぶ状態であるということから従う関係式

$$\sum_n\delta^4(p_n-k)U(\Lambda)|n\rangle\langle n|U^\dagger(\Lambda)=\sum_{n'}\delta^4(p_{n'}-\Lambda k)|n'\rangle\langle n'|\tag{20}$$

とを使えば，(18) の $\rho(k)$ がスカラー関数であって

$$\rho(k)\equiv\rho(k^2)\theta(k_0)\tag{21}$$

の形に書けることがわかる。$\theta(k_0)$ をつけたのは，スペクトル条件から P_0 の正の側にしか固有値がないからである。ここで $k^\mu=0$ の真空 $|0\rangle$ が (18) の中の中間状態 $|n\rangle$ として効かないこと，すなわち

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle=\langle 0|\phi(0)|0\rangle=0\tag{22}$$

を仮定した。万一 $\langle 0|\phi(x)|0\rangle=c\neq 0$ の場合にも，$\phi(x)-c$ を改めて場の演算子 $\phi(x)$ と定義し直せば (22) が成り立つ。

さらにスペクトル条件から $\rho(k^2)$ は $k^2\geqq 0$ でのみ 0 でないことに注意して，(21) を代入すれば (17) は次のように書き直せる：

$$\begin{aligned} i\Delta'(x-y) &= \int d^4k\,(2\pi)^{-3}\rho(k^2)\theta(k_0)(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)}) \\ &= \int_0^\infty d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)\int d^4k\,(2\pi)^{-3}\delta(k^2-\sigma^2)\epsilon(k_0)e^{-ik(x-y)} \\ &= \int_0^\infty d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)i\Delta(x-y\,;\,\sigma^2). \end{aligned} \tag{23}$$

ここで $\Delta(x-y\,;\,\sigma^2)$ は **2-1** の (25) で定義した 2 乗質量 $\mu^2=\sigma^2$ の自由スカラー場の不変デルタ関数である。(ここでは質量パラメータを Δ の引数としてあらわに書いた。)

全く同様な手続きを T 積 **2-1** (31) の Green 関数に行えば

$$\Delta'_F(x-y)\equiv\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\int_0^\infty d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)\Delta_F(x-y\,;\,\sigma^2) \tag{24}$$

を得る。ここの $\rho(\sigma^2)$ は (23) のそれと同じものである。

すなわち，(23) や (24) は，相互作用している場の 2 点 Green 関数が，いろいろな質量を持った自由粒子の 2 点 Green 関数の重ね合せで与えられることを示している。その重ね合せの重みの関数 $\rho(\sigma^2)$ は，スペクトル関数 (spectral function)，(23) や (24) の式は，スペクトル表示 (spectral representation) あるいは梅沢-亀淵-Källen (チェレン)-Lehmann (レーマン) 表示，と呼ばれる。

さて，ここでスペクトル表示から得られる結論を二，三述べよう。まず，スペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ は (18) から明らかなように

$$\rho(\sigma^2)\geqq 0 \tag{25}$$

である。(これは正定値計量を仮定している。) さらに

$$\int_0^\infty d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)=1 \tag{26}$$

を満たすことが次のようにいえる。相互作用系の Heisenberg 演算子 $\phi(x)$ も時刻 $x_0=t$ を一つ固定すれば，その時刻の演算子 $\phi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)$ は Schrödinger 表示の演算子ともみなせて，正準交換関係

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{y},t)]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{27}$$

を満たす。(実際 **2-1** の (4) は，ϕ^4 相互作用系で求めた。) したがって，(13), (23) を y_0 で微分して $y_0=x_0$ とおけば，

$$i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\int_0^\infty d\sigma^2\,\rho(\sigma^2)(-i)\dot{\Delta}(0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\,;\,\sigma^2) \tag{28}$$

を得るが，これは **2-1** の (30) を用いれば (26) を意味していることがわかる。

(18) の $\rho(\sigma^2)$ の定義式の $|\boldsymbol{n}\rangle$ についての和のうち，p^2 が離散的な 1 粒子状態の部分を特に分離しよう。(18) に効くのはスカラーの量子数を持つもののみで，それは質量 μ の粒子 1 種類と仮定した。その 1 粒子状態 $|\boldsymbol{p}(\mu)\rangle$ を単に $|\boldsymbol{p}\rangle$ と記すと，その (18) への寄与は，

$$\rho(k)|_{1\text{粒子部分}}=(2\pi)^3\int d^3p\ \delta^4(p-k)\,|\langle 0|\phi(0)|\boldsymbol{p}\rangle|^2$$
$$=Z\theta(k_0)\delta(k^2-\mu^2) \tag{29}$$

の形をとる。2 番目の等号は，1 粒子状態の 4 元運動量 p^μ が，$p^0>0$ で質量殻 (mass-shell) $p^2=\mu^2$ 上でのみ存在すること，および，$\rho(k)$ がスカラー関数であることから，比例係数 Z を除いて一意的に形が決まるからである。(29) は，ついでながら，(14) を考慮し，$|\boldsymbol{p}\rangle$ の位相を適当にとれば

$$\langle 0|\phi(x)|\boldsymbol{p}\rangle=\frac{\sqrt{Z}\,e^{-ipx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\qquad (p_0\equiv\sqrt{\boldsymbol{p}^2+\mu^2}) \tag{30}$$

となることを意味していることがわかる。(29) よりスペクトル関数は

$$\rho(\sigma^2)=Z\delta(\sigma^2-\mu^2)+\tilde{\rho}(\sigma^2) \tag{31}$$

と書ける。$\tilde{\rho}(\sigma^2)$ は 2 粒子状態以上の連続スペクトルの寄与で，μ が一番軽い粒子の質量とすれば $\sigma^2\geqq(2\mu)^2$ でのみ 0 でない。

(31) を (26) に代入すると

$$Z+\int_{4\mu^2}^{\infty}d\sigma^2\ \tilde{\rho}(\sigma^2)=1. \tag{32}$$

$Z\propto\rho_{1\text{粒子部分}}$ も $\tilde{\rho}(\sigma^2)$ ももちろん，非負であるから，これは

$$0\leqq Z\leqq 1 \tag{33}$$

を意味する。

(32) の式は，直観的な確率解釈ができることを意味している。場の演算子 $\phi(0)$ は真空に掛かって $\phi(0)|0\rangle$ なる状態をつくるのだが，この状態は 1 粒子成分から任意の多粒子成分まで含んでいる。Z は $\phi(0)|0\rangle$ が 1 粒子状態にある確率を表し，$\tilde{\rho}(\sigma^2)$ は 2 粒子以上の連続スペクトルの中で $p^2=\sigma^2$ を満たす状態に存在する確率 (密度) を表しているのである。相互作用が存在する限り，多粒子成分が全然ない $\tilde{\rho}(\sigma^2)\equiv 0$ ということはあり得ない† から，(33) で $Z=1$ は除外される。

(24) は，相互作用の効果がすべて考慮された Feynman 伝播関数 (full

† 事実，$\tilde{\rho}(\sigma^2)\equiv 0$ が自由場の理論を意味することが証明できる。実際 $\tilde{\rho}\equiv 0$ から $(\Box+\mu^2)\phi(x)|0\rangle=0$ が従い，これは，公理論的場の理論の局所演算子に対する一般的定理 [5-10 (9) 参照] から，$(\Box+\mu^2)\phi(x)=0$ を意味するからである。

propagator) $\Delta'_F(x)$ の情報を与える。$\Delta'_F(x)$ の運動量表示 $\Delta'_F(k)$ を

$$\Delta'_F(x)=\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\,e^{-ikx}\Delta'_F(k) \tag{34}$$

で定義すれば，2-1 (32) を用いて，(24) は

$$\Delta'_F(k)=\int_0^\infty d\sigma^2\,\frac{\rho(\sigma^2)}{\sigma^2-k^2-i\epsilon} \tag{35}$$

と書き直せる。この式は，(26) を考慮すると，$k^2\to\infty$ のとき

$$\Delta'_F(k)\longrightarrow -\frac{1}{k^2} \tag{36}$$

と自由場と同様に振舞うことを示す。この事実は，かつて，「相互作用の効果をフルに採り入れると，伝播関数は $k^2\to\infty$ で自由場より速く落ちるようになって，摂動論に現れる紫外発散は実は現れなくなる」のではないかとの期待があったのだが，その期待を打ち砕いた。

3-2 漸近条件と S 行列

Heisenberg 場 $\phi(x)$ は，前節 (10) で述べたように，一般に

$$(\Box+\mu^2)\phi(x)=j(x) \tag{1}$$

の形の運動方程式を満たす。例えば，ϕ^4 理論の場合なら

$$j(x)=(\mu^2-\mu_0^2)\phi-\frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{2}$$

である。直観的にいって，時間 x_0 が $\pm\infty$ にゆく極限では，あらゆる粒子はお互いから遠く離れてしまって他の粒子との相互作用が無視できるようになるはずだから，$\phi(x)$ は自由場のごとく振舞うだろうと期待される。ただ，場の理論のときに注意すべき点は，$x_0\to\pm\infty$ で，他の粒子との相互作用は無視できるようになるけれど，粒子が自分自身のまわりに引きずっている自己場との相互作用はいつまでも切れない，ということである。この自己場との相互作用は，しかし，質量をずらす効果のみであって，(2) のように $j(x)$ にうまく $\delta\mu^2\phi=(\mu^2-\mu_0^2)\phi$ の項を取り込んでおけば，相互作用項 $j(x)$ の効果は全体として $x_0\to\pm\infty$ で消えるとみなせる。(これは 7 章で述べる質量のくりこみである。) そこで，我々は

$$\begin{aligned}\phi(x)&\longrightarrow\sqrt{Z}\,\phi^{\mathrm{in}}(x)\qquad(x_0\to-\infty)\\ \phi(x)&\longrightarrow\sqrt{Z}\,\phi^{\mathrm{out}}(x)\qquad(x_0\to+\infty)\end{aligned} \tag{3}$$

を仮定する。ここで $\phi^{\mathrm{in}},\phi^{\mathrm{out}}$ は，漸近場 (asymptotic field) と呼ばれる二

種の自由場で，共に (ϕ^{in} と ϕ^{out} をまとめて ϕ^{as} と記して)

$$(\Box+\mu^2)\phi^{\text{as}}(x)=0 \tag{4}$$

$$[\phi^{\text{as}}(x),\phi^{\text{as}}(y)]=i\Delta(x-y;\mu^2), \tag{5}$$

を満たすものである。(3) の仮定は Lehmann-Symanzik (シマンツィック) -Zimmermann (ツィンマーマン) [略して LSZ] の漸近条件と呼ばれ，彼らは，(3) の極限を弱極限 (weak limit) の意味とした。すなわち，任意の状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ に対し

$$\langle\alpha|\phi(x)|\beta\rangle \longrightarrow \langle\alpha|\sqrt{Z}\,\phi^{\text{as}}(x)|\beta\rangle \qquad (x_0\to\pm\infty) \tag{6}$$

が成り立つということである。(3) の漸近条件が弱極限であることは，特に，$\phi(x)$ の積の極限が，極限 $\sqrt{Z}\,\phi^{\text{as}}(x)$ の積に一般には一致しないことを意味している点に注意しておく。実際，これが一致すると仮定すると明らかな矛盾に導かれる。(演習問題 3.1 参照)

前節で $\phi(x)|0\rangle$ は 1 粒子成分から多粒子成分まで含むことを説明したが，(3) でいう漸近場 $\sqrt{Z}\,\phi^{\text{as}}(x)$ とは要するに，$\phi(x)|0\rangle$ の中の 1 粒子部分を再現する自由場のことである。すなわち，1 粒子状態を $|\boldsymbol{p}\rangle$ として

$$\langle\boldsymbol{p}|\phi(x)|0\rangle=\sqrt{Z}\langle\boldsymbol{p}|\phi^{\text{as}}(x)|0\rangle \quad \left(=\frac{\sqrt{Z}\,e^{ipx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\right) \tag{7}$$

が成り立ち，したがって (3) の Z は前節のスペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ の 1 粒子部分の重み Z と同一のものなのである。[**3-1** (30) を見よ。]　この (7) を今から示そう。

まず，(1) を (3) の境界条件の下で形式的に "解けば"

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\sqrt{Z}\,\phi^{\text{in}}(x)+\int d^4y\,\Delta_R(x-y;\mu^2)j(y)\\&=\sqrt{Z}\,\phi^{\text{out}}(x)+\int d^4y\,\Delta_A(x-y;\mu^2)j(y)\end{aligned} \tag{8}$$

と書ける。ここで Δ_R, Δ_A は，それぞれ

$$\begin{aligned}\Delta_R(x;\mu^2)&=-\theta(x_0)\Delta(x;\mu^2),\\ \Delta_A(x;\mu^2)&=\theta(-x_0)\Delta(x;\mu^2)\end{aligned} \tag{9}$$

で定義され，遅延 (retarded)，先行 (advanced) Green 関数と呼ばれるもので

$$(\Box+\mu^2)\Delta_{R,A}(x;\mu^2)=\delta^4(x) \tag{10}$$

を満たす。実際，例えば，遅延 Green 関数 $\Delta_R(x-y;\mu^2)$ は $x_0>y_0$ でのみ 0 でないので，$x_0\to-\infty$ にすれば (8) 第 1 式の y 積分項は消え，形式的

に (3) の漸近条件 $\phi(x) \to \sqrt{Z}\,\phi^{\rm in}$ を再現する。(8) は Yang-Feldman (フェルドマン) の方程式と呼ばれ, Heisenberg 場 ϕ と漸近場 $\phi^{\rm in}, \phi^{\rm out}$ の間の関係式を与える。

次に，運動方程式 (1) から出る

$$\langle 0|[j(x), j(y)]|0\rangle = (\Box_x + \mu^2)(\Box_y + \mu^2)\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle \qquad (11)$$

の右辺に前節のスペクトル表示を使えば，$(\Box + \mu^2)$ の演算子のために，1 粒子中間状態の部分が脱落するので，$j(0)|0\rangle$ が 1 粒子成分を持たないこと，すなわち

$$\langle \boldsymbol{p}|j(y)|0\rangle = 0 \qquad (12)$$

がわかる。これを使えば，(8) からすぐに (7) を得る。

この事実を，もう少し別の言い方で表してみよう。スペクトル関数 $\rho(\sigma^2)$ の 1 粒子部分 $Z\delta(\sigma^2 - \mu^2)$ は，運動量表示の 2 点 Green 関数 **3-1** (35) の離散的 pole をつくる部分なので

$$\int d^4x\ e^{ikx}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(0)|0\rangle\Big|_{1\,\text{粒子 pole 部分}} = \frac{1}{i}\,\frac{Z}{\mu^2 - k^2 - i\epsilon}$$

$$= \int d^4x\ e^{ikx}\langle 0|\mathrm{T}\sqrt{Z}\,\phi^{\rm as}(x)\sqrt{Z}\,\phi^{\rm as}(0)|0\rangle \qquad (13)$$

と書ける。すなわち，Heisenberg 場 ϕ の 2 点 Green 関数の 1 粒子 pole 部分を読み取れば，ϕ の重みまで含めた漸近場 $\sqrt{Z}\,\phi^{\rm as}$ がわかるのである。この等式 (13) は，後に Heisenberg 場の情報から漸近場の性質を決定するのに用いる。

***S* 行列**　漸近場は (4), (5) を満たすので，**2-1** の自由場と同様に

$$\phi^{\rm in}(x) = \int d^3k\,[a_{\rm in}(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}(x) + a_{\rm in}^\dagger(\boldsymbol{k})f_{\boldsymbol{k}}^*(x)], \qquad (14)$$

のように展開され，生成・消滅演算子 $a_{\rm in}, a_{\rm in}^\dagger$ や $a_{\rm out}, a_{\rm out}^\dagger$ が定義される。そうすれば，真空から $a_{\rm in}^\dagger$ を演算して張れる Fock 空間

$$\mathcal{V}^{\rm in} = \{a_{\rm in}^\dagger(\boldsymbol{k}_1)a_{\rm in}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\rm in}^\dagger(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle\} \qquad (15)$$

や，$a_{\rm out}^\dagger$ を演算して張られる Fock 空間

$$\mathcal{V}^{\rm out} = \{a_{\rm out}^\dagger(\boldsymbol{k}_1)a_{\rm out}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\rm out}^\dagger(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle\} \qquad (16)$$

がつくれる。

ここで，これらの漸近場で張られる空間 $\mathcal{V}^{\rm in}$, $\mathcal{V}^{\rm out}$ がどちらも，Heisenberg 場 $\phi(x)$ で張られる全体の状態空間 $\mathcal{V}$ と一致するという重要な仮定をする：

$$\mathcal{V}^{\rm in} = \mathcal{V}^{\rm out} = \mathcal{V} \qquad (17)$$

これが，前節初めに少し触れた"漸近的完全性"(asymptotic completeness) の仮定[†]と言われるもので，相互作用する**波動場の理論が粒子描像の言葉で理解できる**ためになくてはならないものである。

この仮定の下で，$a_{\rm in}^\dagger$ でつくられた (15) の Fock 基底のような規格直交完全系を $\{|\alpha\ {\rm in}\rangle\}$，$a_{\rm out}^\dagger$ でつくられた方を $\{|\alpha\ {\rm out}\rangle\}$ と記すと，全状態空間 $\mathcal{V}$ の中で，

$$\sum_\alpha |\alpha\ {\rm in}\rangle\langle\alpha\ {\rm in}| = \sum_\beta |\beta\ {\rm out}\rangle\langle\beta\ {\rm out}| = 1. \tag{18}$$

ただし正定値計量を仮定している。そして，

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle\beta\ {\rm out}|\alpha\ {\rm in}\rangle \tag{19}$$

で，状態 α から状態 β への遷移行列要素，S 行列 (S-matrix) 要素，を定義する。すべて in 状態の基底で考えることにすれば，S 行列演算子 S を

$$\langle\beta\ {\rm out}|\alpha\ {\rm in}\rangle \equiv \langle\beta\ {\rm in}|S|\alpha\ {\rm in}\rangle \tag{20}$$

となるものとして定義できて，$|\alpha\ {\rm in}\rangle$ の完全性から

$$\langle\beta\ {\rm out}| = \langle\beta\ {\rm in}|S. \tag{21}$$

S 行列のこの定義から従う性質をいくつか述べる。

i）　まず，漸近的完全性 (18) から，S 行列のユニタリー性が従う：

$$\begin{aligned}\sum_\beta S_{\gamma\beta}^\dagger S_{\beta\alpha} &= \sum_\beta \langle\gamma\ {\rm in}|\beta\ {\rm out}\rangle\langle\beta\ {\rm out}|\alpha\ {\rm in}\rangle = \delta_{\gamma\alpha},\\ \sum_\beta S_{\gamma\beta} S_{\beta\alpha}^\dagger &= \sum_\beta \langle\gamma\ {\rm out}|\beta\ {\rm in}\rangle\langle\beta\ {\rm in}|\alpha\ {\rm out}\rangle = \delta_{\gamma\alpha}.\end{aligned} \tag{22}$$

ii）　任意の β に対して (21) が成立するから，$\beta = \alpha + \phi(x)$ として

$$\langle\alpha\ {\rm out}|\phi^{\rm out}(x) = \langle\alpha\ {\rm in}|\phi^{\rm in}(x)S. \tag{23}$$

左辺の $\langle\alpha\ {\rm out}|$ を $\langle\alpha\ {\rm in}|S$ として，$\langle\alpha\ {\rm in}|$ の完全性を使えば

$$S\phi^{\rm out}(x) = \phi^{\rm in}(x)S \qquad \text{または} \qquad \phi^{\rm out}(x) = S^\dagger\phi^{\rm in}(x)S. \tag{24}$$

iii）　漸近場 $\phi^{\rm as}(=\phi^{\rm in}, \phi^{\rm out})$ は並進演算子 P^μ に対して，Heisenberg 場 ϕ と同様

$$[iP^\mu, \phi^{\rm as}(x)] = \partial^\mu\phi^{\rm as}(x) \tag{25}$$

と振舞う。これは，Yang-Feldman 方程式 (8) を用い，Heisenberg 場 $\phi(x)$ やその積で与えられる $j(x)$ に対し，P_μ が並進演算子になっていることか

---

† 今は簡単のために 1 種の粒子だけを議論しているが，漸近的完全性の仮定は，漸近場が，必ずしも Lagrangian に現れる "素" な Heisenberg 場の極限としてだけ現れる，とは主張しない。結合状態に対応する漸近場は Heisenberg 場の多項式の極限に現れる。また逆にこの仮定は，すべての素な Heisenberg 場に必ず漸近場が存在することを要求しているわけでもない。

ら示せる。(25) は，消滅演算子 $a_{\rm as}(\boldsymbol{k})\,(=a_{\rm in}(\boldsymbol{k}), a_{\rm out}(\boldsymbol{k}))$ に対し

$$[P^\mu, a_{\rm as}(\boldsymbol{k})]=-k^\mu a_{\rm as}(\boldsymbol{k}), \tag{26}$$

を意味するから，$a_{\rm as}(\boldsymbol{k})$ は状態のエネルギーを $k^0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}$ だけ下げる。ところが，系の真空 $|0\rangle$ はスペクトル条件の仮定により最低エネルギー状態であるから，$a_{\rm in}(\boldsymbol{k})|0\rangle=a_{\rm out}(\boldsymbol{k})|0\rangle=0$ でなければならない。すなわち

$$|0\ {\rm in}\rangle=|0\ {\rm out}\rangle=|0\rangle, \qquad \text{それゆえ} \qquad S|0\rangle=|0\rangle. \tag{27}$$

これは真空の安定性を意味する。1 粒子状態についても，安定性が (7) から従う：

$$a_{\rm in}^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle=a_{\rm out}^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle=|\boldsymbol{p}\rangle. \tag{28}$$

iv) 上で P^μ に対して行った議論は，全く任意の，Heisenberg 演算子 $\phi(x)$ や $j(x)$ に対して**線形変換**

$$[iQ, \phi(x)]=q(\partial)\phi(x), \qquad [iQ, j(x)]=q(\partial)j(x), \tag{29}$$

[$q(\partial)$ は微分演算や ϕ, j の成分添字に対する行列演算などを含む線形演算子] を引き起こす (well-defined な†) 保存量 Q，に対し常に適用できる。すなわち，漸近場 $\phi^{\rm as}(x)$ も Heisenberg 場 $\phi(x)$ の変換 (29) と同じ形の変換をする：

$$[iQ, \phi^{\rm as}(x)]=q(\partial)\phi^{\rm as}(x). \tag{30}$$

ところが，$\phi^{\rm in}, \phi^{\rm out}$ が共に同じ形の (30) の変換をするということと，(24) の関係式から，S 行列の Q-不変性

$$[iQ, S]=0 \qquad \text{または} \qquad e^{i\theta Q}Se^{-i\theta Q}=S \tag{31}$$

が従う (演習問題 3.2)。特に，Q として Lorentz 変換 $M^{\mu\nu}$ をとってももちろん成り立つので，S 行列の Lorentz 不変性がいえる。

最後に不定計量が存在するときの注意を付け加えておこう。その場合，(18) の漸近的完全性関係を，計量 $\eta_{\alpha\beta}=\langle\alpha\ {\rm as}|\beta\ {\rm as}\rangle$ を含んだ形

$$\sum_{\alpha,\beta}|\alpha\ {\rm in}\rangle\eta^{-1}_{\alpha\beta}\langle\beta\ {\rm in}|=\sum_{\alpha,\beta}|\alpha\ {\rm out}\rangle\eta^{-1}_{\alpha\beta}\langle\beta\ {\rm out}|=1 \tag{32}$$

に置き換える必要がある。(我々のゲージ理論の具体例では望めば $\eta^{-1}_{\alpha\beta}=\pm1\delta_{\alpha\beta}$ の対角形まで持っていける。) (19) 以降の S 行列の定義や性質は基本的には何も変わらないが，ただ (19) の行列要素の解釈は少し違ってきて，

---

† 対称性の自発的破れが起こっている場合は，形式的に $Q=\int d^3x\, j_{\mu=0}(x)$ で定義した保存電荷 Q は，d^3x 積分が収束せず，“well-defined な” 演算子とはならない。(6-1 を見よ。)

$$|\alpha\ \mathrm{in}\rangle=\sum_{\gamma}|\gamma\ \mathrm{out}\rangle\Big(\sum_{\beta}\eta^{-1}_{\gamma\beta}\langle\beta\ \mathrm{out}|\alpha\ \mathrm{in}\rangle\Big) \tag{33}$$

であるので，$\sum_{\beta}\eta^{-1}_{\gamma\beta}\langle\beta\ \mathrm{out}|\alpha\ \mathrm{in}\rangle$ が，状態 α が状態 γ へ遷移する確率振幅を与えることになる。(20), (21) は変わらないから

$$\langle\beta\ \mathrm{in}|SS^{\dagger}|\alpha\ \mathrm{in}\rangle=\langle\beta\ \mathrm{out}|\alpha\ \mathrm{out}\rangle=\langle\beta\ \mathrm{in}|1|\alpha\ \mathrm{in}\rangle \tag{34}$$

で S 行列演算子 S のユニタリー性 $SS^{\dagger}=1$ も変わらずに出る。しかし，この場合これを行列要素で書くと，

$$\sum_{\gamma,\delta}\langle\beta\ \mathrm{in}|S|\gamma\ \mathrm{in}\rangle\eta^{-1}_{\gamma\delta}\langle\delta\ \mathrm{in}|S^{\dagger}|\alpha\ \mathrm{in}\rangle=\sum_{\gamma,\delta}S_{\beta\gamma}\,\eta^{-1}_{\gamma\delta}\,S^{\dagger}_{\delta\alpha}=\eta_{\beta\alpha} \tag{35}$$

のように計量 η やその逆 η^{-1} の行列の混じった式になるので，正定値計量の場合と区別して，準ユニタリー (quasi-unitary) と呼ばれることもある。

3-3 LSZ の簡約公式と Haag-GLZ 公式

これから，LSZ の漸近条件に基づいて，S 行列要素を T 積の n 点 Green 関数に関係付けるいわゆる LSZ の簡約公式を導こう。便宜のため，この節では，もとの Heisenberg 場 $\phi(x)$ の代わりに，くりこまれた Heisenberg 場 (renormalized Heisenberg field)

$$\boldsymbol{\phi}(x)\equiv Z^{-1/2}\phi(x) \tag{1}$$

をもっぱら用いる。$\boldsymbol{\phi}$ に対しては LSZ の漸近条件 3-2 の (3) は簡単に

$$\boldsymbol{\phi}(x)\ \longrightarrow\ \phi^{\mathrm{as}}(x)\qquad(\mathrm{as}=\mathrm{out,in},\ \ x^0\to\pm\infty) \tag{2}$$

となる。また，Heisenberg 場の T 積

$$\mathrm{T}[\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)]\equiv\boldsymbol{\phi}(x_{i_1})\boldsymbol{\phi}(x_{i_2})\cdots\boldsymbol{\phi}(x_{i_n})$$
$$(x^0_{i_1}\geqq x^0_{i_2}\geqq\cdots\geqq x^0_{i_n}\ \text{のとき}) \tag{3}$$

を $\mathrm{T}(x_1\cdots x_n)$ と略記することにする。

さて，漸近場は自由場であるから，2-1 (13), 3-2 (14) より

$$a_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k})=i\int d^3x\ f^*_{\boldsymbol{k}}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi^{\mathrm{as}}(x) \tag{4}$$

である。これと漸近条件 (2) とから

$$\begin{aligned}
&a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k})\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)-\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)a_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{k})\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}dx^0\ \partial_0\Big[i\int d^3x\ f^*_{\boldsymbol{k}}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n)\Big]\\
&=i\int d^4x\ [f^*_{\boldsymbol{k}}(x)\partial_0^2\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n)-\{\partial_0^2f^*_{\boldsymbol{k}}(x)\}\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n)]
\end{aligned} \tag{5}$$

が出る。ここで波動関数 $f_{\boldsymbol{k}}^*(x)$ が Klein-Gordon 方程式

$$\partial_0^2 f_{\boldsymbol{k}}^*(x)=(\nabla^2-\mu^2)f_{\boldsymbol{k}}^*(x) \tag{6}$$

を満たすことを使い，∇^2 を部分積分すれば

$$\begin{aligned}a_{\text{out}}(\boldsymbol{k})\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)-\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)a_{\text{in}}(\boldsymbol{k})\\ =i\int d^4x\, f_{\boldsymbol{k}}^*(x)(\overrightarrow{\Box}+\mu^2)\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n)\end{aligned} \tag{7}$$

を得る。この式で $\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)=1$，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_m$ とし，

$$\langle \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_{m-1}\ \text{out}|=\langle 0|a_{\text{out}}(\boldsymbol{k}_1)a_{\text{out}}(\boldsymbol{k}_2)\cdots a_{\text{out}}(\boldsymbol{k}_{m-1}), \tag{8}$$

$$|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\ \text{in}\rangle=a_{\text{in}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a_{\text{in}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots a_{\text{in}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle \tag{9}$$

で両辺をはさめば次式を得る：

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{m-1}\boldsymbol{k}_m\ \text{out}|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\ \text{in}\rangle\\ &\qquad -\langle \boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{m-1}\ \text{out}|a_{\text{in}}(\boldsymbol{k}_m)|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\ \text{in}\rangle\\ &=i\int d^4x\, f_{\boldsymbol{k}_m}^*(x)(\overrightarrow{\Box}+\mu^2)\langle \boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{m-1}\ \text{out}|\boldsymbol{\phi}(x)|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\ \text{in}\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

もし，in 状態の $(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$ の中に $\boldsymbol{k}_m$ と同じ運動量の粒子がなければ，左辺第 2 項は消え，この公式 (10) は，左辺の out 状態中の $\boldsymbol{k}_m$ 粒子を右辺では Heisenberg 場 $\boldsymbol{\phi}(x)$ に置き換えていることになる。

この置き換えを，out 状態の $\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{m-1}$ 粒子すべてについても (7) を使って行うことができる。また，in 状態の $\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n$ 粒子についても，(7) と同様に導くことができる公式

$$\begin{aligned}a_{\text{out}}^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)-\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)a_{\text{in}}^\dagger(\boldsymbol{k})\\ =-i\int d^4x\, f_{\boldsymbol{k}}(x)(\overrightarrow{\Box}+\mu^2)\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n)\end{aligned} \tag{11}$$

を使ってすべて Heisenberg 場に置き換えることができて，もし $(\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_m)$ と $(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n)$ とに一つも共通の運動量がなければ

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_m\ \text{out}|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\ \text{in}\rangle\\ &=\prod_{i=1}^{m}\left(i\int d^4x_i\, f_{\boldsymbol{k}_i}^*(x_i)(\overrightarrow{\Box}_{x_i}+\mu^2)\right)\prod_{j=1}^{n}\left(i\int d^4y_j\, f_{\boldsymbol{p}_j}(y_j)(\overrightarrow{\Box}_{y_j}+\mu^2)\right)\\ &\qquad\times\langle 0|\mathrm{T}[\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_m)\boldsymbol{\phi}(y_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(y_n)]|0\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

を得る。これは LSZ の簡約公式 (reduction formula) と呼ばれる。この公式を使えば，結局，S 行列要素は，Heisenberg 場の T 積の真空期待値

$$\langle 0|\mathrm{T}[\boldsymbol{\phi}(x_1)\boldsymbol{\phi}(x_2)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)]|0\rangle\equiv G^{(n)}(x_1x_2\cdots x_n) \tag{13}$$

がわかれば計算できるということになる。(この $G^{(n)}$ を **n 点 Green 関数**と呼ぶ。)

S 行列要素ではなく演算子 S や，Heisenberg 演算子を漸近場で表す公式を求めることもできる。(7) に $f_k(z)$ を，(11) に $f_k^*(z)$ を掛けて $\int d^3k$ 積分すれば

$$\phi^{\text{out}}(z)\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)-\mathrm{T}(y_1\cdots y_n)\phi^{\text{in}}(z) = -\int d^4x\ \Delta(z-x)K_x\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n) \tag{14}$$

を得る。ただし **2-1** の (25) で定義された不変デルタ関数が

$$i\Delta(x-y)=\int d^3k\ \{f_k(x)f_k^*(y)-f_k^*(x)f_k(y)\} \tag{15}$$

と書けること，そして Klein-Gordon 演算子に対する略記

$$K_x\equiv(\Box_x+\mu^2) \tag{16}$$

を使った。(14) に左から S 行列演算子 S を掛け，**3-2** (24) を使えば

$$[S\mathrm{T}(y_1\cdots y_n),\phi^{\text{in}}(z)]=\int d^4x\ \Delta(z-x)K_xS\mathrm{T}(x\,y_1\cdots y_n). \tag{17}$$

この操作をくり返せば

$$[[\cdots[[S\mathrm{T}(y_1\cdots y_n),\phi^{\text{in}}(z_1)],\phi^{\text{in}}(z_2)],\cdots],\phi^{\text{in}}(z_m)] = \prod_{j=1}^{m}\left(\int d^4x_j\ \Delta(z_j-x_j)K_{x_j}\right)S\mathrm{T}(x_1\cdots x_m\,y_1\cdots y_n) \tag{18}$$

を得る。ここで，出発点でとった $\boldsymbol{\phi}(y_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(y_n)$ は任意でよかったから，1 点 y の上の演算子 $\boldsymbol{\phi}(y)$ の多項式† $\mathcal{O}(y)$ に置き換え，両辺を真空ではさむと，前節で注意した $\langle 0|S=\langle 0|$ を使って

$$\langle 0|[[\cdots[S\,\mathcal{O}(y),\phi^{\text{in}}(z_1)],\cdots],\phi^{\text{in}}(z_m)]|0\rangle = \prod_{j=1}^{m}\left(\int d^4x_j\ \Delta(z_j-x_j)K_{x_j}\right)\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_m)\,\mathcal{O}(y)|0\rangle \tag{19}$$

となる。他方，漸近場 $\phi^{\text{in}}(x)$ は漸近的完全性の仮定により演算子としても完全系をなすから，演算子 $S\,\mathcal{O}(y)$ も必ず $\phi^{\text{in}}(x)$ で展開できて

$$S\,\mathcal{O}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\ c_n(x_1\cdots x_n\,y):\phi^{\text{in}}(x_1)\cdots\phi^{\text{in}}(x_n): \tag{20}$$

と書ける。: : は生成演算子を左，消滅演算子を右に持ってくる正規順序 (normal order) をとることを表し，係数 c_n はもちろん $x_1,\cdots,x_n$ の対称関数である。(20) を (19) の左辺に代入すれば，(20) の $n=m$ の項のみ効いて

$$(19)\text{ の左辺}=i^m\prod_{j=1}^{m}\left(\int d^4x_j\ \Delta(x_j-z_j)\right)c_m(x_1\cdots x_m\,y). \tag{21}$$

---

† 係数に y についての有限回微分が含まれていてよいとしよう。

これを (19) の右辺と比較すれば，係数 c_n に対し

$$c_n(x_1\cdots x_n y)=i^n K_{x_1}\cdots K_{x_n}\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)\mathcal{O}(y)|0\rangle \qquad (22)$$

の表式を得る†。したがって (20) は

$$\begin{aligned} S\,\mathcal{O}(y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n :\phi^{\mathrm{in}}(x_1)\cdots\phi^{\mathrm{in}}(x_n): \\ &\qquad\times i^n K_{x_1}\cdots K_{x_n}\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)\mathcal{O}(y)|0\rangle \\ &= :\exp(\phi^{\mathrm{in}}K\,\delta/\delta J): \langle 0|\mathrm{T}\,\mathcal{O}(y)\exp(iJ\boldsymbol{\phi})|0\rangle|_{J=0} \qquad (23)\end{aligned}$$

となる。ただし最後の表式では

$$\phi^{\mathrm{in}}K\,\delta/\delta J\equiv\int d^4x\left\{\phi^{\mathrm{in}}(x)\vec{K}_x\frac{\delta}{\delta J(x)}\right\} \qquad (24)$$

$$iJ\boldsymbol{\phi}\equiv i\int d^4x\,J(x)\boldsymbol{\phi}(x) \qquad (25)$$

の略記を使った。$|_{J=0}$ は J 微分をすべて演算し終わった後に $J=0$ とおくことを意味する。

(23) が Haag (ハーグ)-Glaser (グレーザー)-Lehmann-Zimmermann の公式，あるいは単に GLZ 公式と呼ばれるものである。(23) で $\mathcal{O}(y)=1$ とすれば，S 行列演算子を漸近場 ϕ^{in} で展開した公式

$$S= :\exp(\phi^{\mathrm{in}}K\,\delta/\delta J): \langle 0|\mathrm{T}\exp(iJ\boldsymbol{\phi})|0\rangle|_{J=0} \qquad (26)$$

が得られる。

コメントをいくつか付け加えておこう。

i）スカラー場が何種類もある場合，$\boldsymbol{\phi}_i$ $(i=1,2,\cdots,N)$，でその漸近場 ϕ_i^{in} の計量が (必ずしも正定値でなくて対角化されていない)

$$[\phi_i^{\mathrm{in}}(x),\phi_j^{\mathrm{in}}(y)]=i\eta_{ij}\Delta(x-y\,;\,\mu_i^2) \qquad (27)$$

となる系を考えよう。計量行列 η_{ij} はもちろん質量の等しい場 ϕ_i^{in} と ϕ_j^{in} の間でのみ 0 でなく，μ_i はその共通の質量である。このとき，上の GLZ 公式 (23), (26) は，単に，次の読みかえ

$$\begin{aligned}\phi^{\mathrm{in}}K\,\delta/\delta J &\longrightarrow \int d^4x\sum_{i,j}\phi_i^{\mathrm{in}}(x)\eta_{ij}^{-1}(\Box+\mu_j^2)\delta/\delta J_j(x) \\ J\boldsymbol{\phi} &\longrightarrow \int d^4x\sum_i J_i(x)\boldsymbol{\phi}_i(x)\end{aligned} \qquad (28)$$

を行えばそのまま正しい。これは上の導出から明らかだろう。

† 正確にいえば，運動量表示で考えると $\Delta(p_j)\propto\delta(p_j^2-\mu^2)$ であるから，(19) からは c_n は質量殻 $p_j^2=\mu^2$ の上でしか決まらない。しかし，どのみち欲しい (20) では質量殻上の値しか効かないのである。

ii） スピノール場の場合でも基本的には同じであるが，少し見かけが異なる。漸近場 ψ^{as} の粒子・反粒子の生成・消滅演算子を取り出す，自由 Dirac 場の場合の公式，2-2 の (24),(25)，すなわち

$$
\begin{aligned}
b_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{p}, s) &= \int d^3x\ \bar{U}_{\boldsymbol{p}s}(x)\gamma_0\psi^{\mathrm{as}}(x),\\
d^{\dagger}_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{p}, s) &= \int d^3x\ \bar{V}_{\boldsymbol{p}s}(x)\gamma_0\psi^{\mathrm{as}}(x),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

およびその複素共役，が上のスカラーの場合の (4) と同じ出発点となる。(5) と同じ手続きを行い $U_{\boldsymbol{p}s}(x)$, $V_{\boldsymbol{p}s}(x)$ が Dirac 方程式を満たすことを使えば，

$$
\begin{aligned}
& b_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}, s)\mathrm{T}(\mathcal{O}) - (-)^{|\mathcal{O}|}\mathrm{T}(\mathcal{O})b_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}, s)\\
&\qquad = -i\int d^4x\ \bar{U}_{\boldsymbol{p}s}(x)(i\gamma^{\mu}\overrightarrow{\partial}_{\mu} - m)\mathrm{T}(\boldsymbol{\psi}(x)\mathcal{O}),\\
& (-)^{|\mathcal{O}|+1}d^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}, s)\mathrm{T}(\mathcal{O}) + \mathrm{T}(\mathcal{O})d^{\dagger}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}, s)\\
&\qquad = +i\int d^4x\ \bar{V}_{\boldsymbol{p}s}(x)(i\gamma^{\mu}\overrightarrow{\partial}_{\mu} - m)\mathrm{T}(\mathcal{O}\boldsymbol{\psi}(x)),\\
& (-)^{|\mathcal{O}|+1}b^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}, s)\mathrm{T}(\mathcal{O}) + \mathrm{T}(\mathcal{O})b^{\dagger}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}, s)\\
&\qquad = -i\int d^4x\ \mathrm{T}(\mathcal{O}\bar{\boldsymbol{\psi}}(x))(-i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} - m)U_{\boldsymbol{p}s}(x),\\
& d_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}, s)\mathrm{T}(\mathcal{O}) - (-)^{|\mathcal{O}|}\mathrm{T}(\mathcal{O})d_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}, s)\\
&\qquad = +i\int d^4x\ \mathrm{T}(\bar{\boldsymbol{\psi}}(x)\mathcal{O})(-i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} - m)V_{\boldsymbol{p}s}(x),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

が得られる。ただし，ここで $\boldsymbol{\psi}(x)$ は，漸近条件が

$$
\boldsymbol{\psi}(x) \longrightarrow \psi^{\mathrm{as}}(x) \qquad (x_0 \to \pm\infty) \tag{31}
$$

となるくりこまれた Heisenberg (表示の Dirac)場で，$\mathcal{O}$ は一般のスカラー $\boldsymbol{\phi}$ や Dirac $\boldsymbol{\psi}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ の Heisenberg 場の多点の積である。Dirac 場が Fermi 統計だということで符号因子 $(-)^{|\mathcal{O}|}$ が現れている。$|\mathcal{O}|$ は 2-2 (3) と同様，$\mathcal{O}$ の中に Dirac 場が奇数個入っているなら 1，偶数個なら 0 と定義する。また，Dirac 場が混じっているときの多点の T 積は，$\boldsymbol{\phi}$ や $\boldsymbol{\psi}$ や $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ をひっくるめて φ と記して，一般に

$$
\mathrm{T}[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)] = \pm\varphi(x_{i_1})\varphi(x_{i_2})\cdots\varphi(x_{i_n}) \qquad (x^0_{i_1} \geqq x^0_{i_2} \geqq \cdots \geqq x^0_{i_n}\ のとき) \tag{32}
$$

と定義されるが，符号 ± の選択は，左辺の演算子の順序を右辺の演算子の順序に持っていくとき，Dirac 場が他の Dirac 場を飛び越すごとに一つ一つマイナスの因子が出るものとして計算する。すなわち，T 積の中では

Dirac 場は Grassmann 数かのように振舞うのである。

(30) を使えば，LSZ の簡約公式や GLZ 公式が Dirac 場の場合にどのようになるか明らかであろう。

演習問題 3.

3.1 Heisenberg 場 $\phi(x)$ と時間微分 $\partial_0\phi(y)=\dot{\phi}(y)$ の同時刻の積 $\phi(x)\dot{\phi}(y)$, $\dot{\phi}(y)\phi(x)$ ($x_0=y_0$) に対して，もしその $x_0=y_0\to\pm\infty$ 極限が漸近場の対応する積に一致すると仮定すれば，すなわち

$$\phi(x)\dot{\phi}(y) \longrightarrow Z\phi^{\mathrm{as}}(x)\dot{\phi}^{\mathrm{as}}(y), \qquad \dot{\phi}(y)\phi(x) \longrightarrow Z\dot{\phi}^{\mathrm{as}}(y)\phi^{\mathrm{as}}(x)$$

を仮定すれば，$Z=1$ が結論されることを正準交換関係を利用して示せ。このことは自由場の理論で $\phi(x)\equiv\phi^{\mathrm{as}}(x)$ がもともと成立しているとき以外，そのような仮定が矛盾することを示している。

3.2 3-2 の (30) および $S^\dagger\phi^{\mathrm{in}}(x)S=\phi^{\mathrm{out}}(x)$ より，まず

$$[[iQ,S]S^\dagger,\phi^{\mathrm{in}}(x)]=0$$

を導け。これから，漸近的完全性および保存量の一般的性質 $Q|0\rangle=0$ (**6-1** 参照) を用いて

$$[iQ,S]=0$$

が結論できることを示せ。

4. 経路積分と摂動論

4-1 量子力学系の経路積分

位相空間における経路積分 Hamiltonian が次式で与えられる 1 自由度量子力学系を考える：

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2+V(\boldsymbol{q})\equiv H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}). \tag{1}$$

この章では，演算子は太字で，その対応する c 数古典量は対応する普通文字で，それぞれ表すことにする。したがって (1) の $\boldsymbol{p}$ や $\boldsymbol{q}$ は単に 1 自由度の演算子でありベクトルではない†。

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は Schrödinger 表示の演算子で，Heisenberg 表示の演算子 $\boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q}(t)$ と時刻 $t=0$ で一致するものとする：

$$\boldsymbol{p}(t)=e^{i\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{p}e^{-i\boldsymbol{H}t}, \qquad \boldsymbol{q}(t)=e^{i\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{q}e^{-i\boldsymbol{H}t}. \tag{2}$$

Heisenberg 演算子の固有状態

$$\boldsymbol{q}(t)|q,t\rangle=q|q,t\rangle \qquad (\boldsymbol{p}(t)|p,t\rangle=p|p,t\rangle) \tag{3}$$

は，Schrödinger 演算子の固有状態

$$\boldsymbol{q}|q\rangle=q|q\rangle \qquad (\boldsymbol{p}|p\rangle=p|p\rangle) \tag{4}$$

と，もちろん，次式の関係でつながっている：

$$|q,t\rangle=e^{i\boldsymbol{H}t}|q\rangle \qquad (|p,t\rangle=e^{i\boldsymbol{H}t}|p\rangle). \tag{5}$$

さて，今から次の遷移振幅を計算することを考えよう。

$$\langle q_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}\rangle=\langle q_{\mathrm{F}}|e^{-i\boldsymbol{H}(t_{\mathrm{F}}-t_{\mathrm{I}})}|q_{\mathrm{I}}\rangle. \tag{6}$$

時刻 t_{I} から t_{F} の間を $N+1$ 等分した時系列

---

† ベクトル量は，この章では，$\vec{\boldsymbol{p}}$ や $\vec{p}$ など矢印で表すものとする。

$$t_{\mathrm{I}}=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N<t_{\mathrm{F}}=t_{N+1},$$
$$\Delta t\equiv t_{j+1}-t_j=\frac{t_{\mathrm{F}}-t_{\mathrm{I}}}{N+1} \tag{7}$$

をとり，各時刻 t_j での Heisenberg 演算子 $\boldsymbol{q}(t_j)$ の固有ベクトル完全系

$$\int dq_j\,|\,q_j,\,t_j\rangle\langle q_j,\,t_j|=1 \tag{8}$$

を (6) の間にはさんでやれば，遷移振幅は

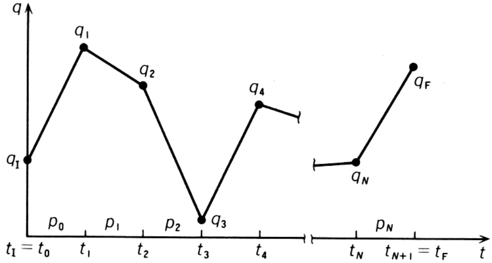
$$\langle q_{\mathrm{F}},\,t_{\mathrm{F}}|\,q_{\mathrm{I}},\,t_{\mathrm{I}}\rangle$$
$$=\int\cdots\int dq_1\cdots dq_N\left(\prod_{j=1}^{N}\langle q_{j+1},\,t_{j+1}|\,q_j,\,t_j\rangle\right)\langle q_1,\,t_1|\,q_0,\,t_0\rangle \tag{9}$$

と書ける。この (9) の N 重積分の被積分関数は，$q_{\mathrm{I}}\equiv q_0$ から出発し，(7) の各時刻に $q_1, q_2, \cdots, q_N$ を経て $q_{\mathrm{F}}\equiv q_{N+1}$ に至る一つの経路 (4·1 図) に対応する振幅を与えており，それゆえ (9) は (6) の遷移振幅があらゆる経路に対応する振幅を足し上げたものであることを示している。我々は最終的には $N\to\infty$ の極限をとりたいので，(9) の中の $\langle q_{j+1},\,t_{j+1}|\,q_j,\,t_j\rangle$ は $\Delta t=t_{j+1}-t_j$ の 1 次までの近似で評価すれば十分である：

$$\langle q_{j+1},\,t_{j+1}|\,q_j,\,t_j\rangle=\langle q_{j+1}|\,e^{-i\boldsymbol{H}\Delta t}|\,q_j\rangle$$
$$=\langle q_{j+1}|(1-i\boldsymbol{H}\Delta t)|\,q_j\rangle \tag{10}$$

$\boldsymbol{H}$ の運動項，ポテンシャル項の行列要素は，$\boldsymbol{p}$ の固有ベクトルの完全系を挿入したり，$\langle q\,|\,p\rangle=e^{ipq}/\sqrt{2\pi}$ を用いて，次のように評価する。

$$\left\langle q_{j+1}\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2\right|q_j\right\rangle=\int dp_j\left\langle q_{j+1}\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2\right|p_j\right\rangle\left\langle p_j\middle|q_j\right\rangle$$
$$=\int\frac{dp_j}{2\pi}\,\frac{1}{2}p_j{}^2e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}, \tag{11}$$



4·1 図

$$\langle q_{j+1}|V(\boldsymbol{q})|q_j\rangle = V(q_j)\delta(q_{j+1}-q_j)$$
$$= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\int\frac{dp_j}{2\pi}\,e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}. \tag{12}$$

そうすれば，(10) は

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle = \int\frac{dp_j}{2\pi}\left\{1-i\Delta t\,H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right\}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}$$
$$= \int\frac{dp_j}{2\pi}\exp i\left[p_j(q_{j+1}-q_j)-H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\Delta t\right] \tag{13}$$

と書けるので，(6) の遷移振幅は結局

$$\langle q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\frac{dp_0}{2\pi}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{dp_j\,dq_j}{2\pi}\right)\exp i\sum_{j=0}^{N}\left[p_j\frac{q_{j+1}-q_j}{\Delta t}-H\left(p_j, \frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\right]\Delta t$$
$$= \int_{q(t_{\mathrm{I}})=q_{\mathrm{I}}}^{q(t_{\mathrm{F}})=q_{\mathrm{F}}}\mathscr{D}p\mathscr{D}q\,\exp i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt\,[p(t)\dot{q}(t)-H(p(t), q(t))] \tag{14}$$

となる。第 3 行は，第 2 行の $N\to\infty$ の極限の略記である。

もし，初期・終状態が $\boldsymbol{q}$ の決まった状態ではなくもっと一般に波動関数 $\psi_{\mathrm{I,F}}(q)=\langle q|\psi_{\mathrm{I,F}}\rangle$ で記述される状態であれば，遷移振幅は

$$\langle\psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle = \iint dq_{\mathrm{I}}dq_{\mathrm{F}}\langle\psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}\rangle\langle q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle\langle q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}|\psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle$$
$$= \int\mathscr{D}p\mathscr{D}q\,\psi_{\mathrm{F}}^*(q(t_{\mathrm{F}}))\psi_{\mathrm{I}}(q(t_{\mathrm{I}}))\exp i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt[p\dot{q}-H(p, q)] \tag{15}$$

となる。(14) または (15) が，最も簡単な 1 自由度系に対する，**位相空間** (phase space) **における経路積分** (path integral) の公式である。すなわち，$(p(t), q(t))_{t_{\mathrm{I}}\leq t\leq t_{\mathrm{F}}}$ は位相空間における一つの経路を表し，(14), (15) はその経路についての足し上げになっている。後でやるように $p(t)$ に関する積分 $\mathscr{D}p$ を先に遂行してしまえば，結果として配位空間 (configuration space) における経路 $(q(t))_{t_{\mathrm{I}}\leq t\leq t_{\mathrm{F}}}$ に関する経路積分の表式が得られる。Feynman の経路積分はもともと**配位空間における経路積分**として提出されたが，上で見たように正準量子論と直接結びついているのは位相空間における経路積分の方であって，(14), (15) がその基本的な公式を与える。

Weyl 変換と Weyl 順序　上では (1) のような簡単な Hamiltonian を考えたが，もっと一般の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が混じった項を持つ Hamiltonian の場合は，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の順序を変えると非可換な部分だけずれて H の見かけの関数形が変化する。そこで，経路積分の表式 (14) に現れる古典的 Hamiltonian

$$H(p_j,\ \bar{q}_j), \qquad \bar{q}_j \equiv \frac{(q_{j+1}+q_j)}{2} \tag{16}$$

は，量子論の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ と一般にいかなる関係にあるのかという疑問が生ずる。

これに答える前に，まず，経路積分中の古典的 Hamiltonian の q 座標は (16) に書いたように q_j と q_{j+1} の中点 $\bar{q}_j$ で書くという約束をする。この中点処法 (midpoint prescription) と呼ばれる約束の代わりに，q_j で書くとか，q_{j+1} で書くとか，いろいろ別な約束をとることももちろんできるが，とにかく一つ約束を固定しておかないと，一般には同一の $\boldsymbol{H}$ に対してもこの q の書き方で H の関数形が変わるのである†。特に中点処法の約束をとる理由は，$N\to\infty$ の連続極限への移行がスムースであることなどいくつかよい性質があるからであるが，ここでは触れない。

上の (10) から (13) に至る導出から，一般の $\boldsymbol{H}$ と H の関係は

$$\langle q_{j+1}|\boldsymbol{H}|q_j\rangle = \int dp_j\,(2\pi)^{-1}e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)}H(p_j,\ \bar{q}_j) \tag{17}$$

で与えられることがわかる。これを $H(p,q)$ について解くと

$$\begin{aligned} H(p,q) &= \int dv\ e^{ipv}\left\langle q-\frac{v}{2}\right|\boldsymbol{H}\left|q+\frac{v}{2}\right\rangle \\ &= \int du\ e^{iqu}\left\langle p+\frac{u}{2}\right|\boldsymbol{H}\left|p-\frac{u}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

が得られる。第 2 式は $\boldsymbol{p}$ の固有ベクトルによる表現である。(18) の形の，演算子 $\boldsymbol{H}$ から c 数関数 $H(p,q)$ への写像は，一般に Weyl (ワイル) 変換と呼ばれている。この変換の逆変換はよく知られていて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \int\frac{dp\,dq}{2\pi}\,H(p,q)\boldsymbol{\Delta}(p,q) \\ \boldsymbol{\Delta}(p,q) &\equiv \int du\ e^{iqu}\left|p-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle p+\frac{u}{2}\right| = \int dv\ e^{ipv}\left|q+\frac{v}{2}\right\rangle\left\langle q-\frac{v}{2}\right| \\ &= \int\frac{du\,dv}{2\pi}\exp i[(q-\boldsymbol{q})u+(p-\boldsymbol{p})v] \end{aligned} \tag{19}$$

で与えられる (演習問題 4.1)。(18) と (19) より，量子論の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ と経路積分に現れる古典的 Hamiltonian $H(p,q)$ とは，中点処法をとる約束の下で，互いに Weyl 変換と逆 Weyl 変換で 1 対 1 に対応していることがわかる。

---

† 上の (1) の $\boldsymbol{H}$ の場合は，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の混じった項がなかったので，実は $\bar{q}_j$ でも，q_j でも q_{j+1} でもどれでもよかったのである。

蛇足ながら，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ のべきの単項式に対する Weyl 順序積 $\{\cdots\}_{\rm W}$ と呼ばれるものを，簡単な例では，例えば

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{pq}\}_{\rm W}&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{pq}+\boldsymbol{qp})\\ \{\boldsymbol{pq}^3\}_{\rm W}&=\frac{1}{4}(\boldsymbol{pq}^3+\boldsymbol{qpq}^2+\boldsymbol{q}^2\boldsymbol{pq}+\boldsymbol{q}^3\boldsymbol{p})\end{aligned} \tag{20}$$

で，一般には

$$\exp(\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q})=\sum_{n,m}\frac{1}{n!\,m!}\alpha^n\beta^m\{\boldsymbol{p}^n\boldsymbol{q}^m\}_{\rm W} \tag{21}$$

で定義すると，上の Weyl 変換による対応は

$$H(p,q)\longleftrightarrow \boldsymbol{H}=\{H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}_{\rm W} \tag{22}$$

で特徴付けられる。すなわち，演算子を Weyl 順序積で書くことにすれば，量子論と古典論の Hamiltonian は同じ関数形を持つことになるのである。このことは，実際，Weyl 順序積の生成関数 $\exp(\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q})$ の Weyl 変換を行ってみて次の対応が確かめられることから明らかである：

$$\exp(\alpha p+\beta q)\longleftrightarrow \exp(\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}). \tag{23}$$

以上ここまで，もっぱら1自由度系に話を限ってきたが，座標変数が q^a $(a=1,2,\cdots,n)$，共役運動量が p_a で与えられる n 自由度系の場合でも，上の Weyl 変換や経路積分の公式が，単に

$$dq_j=\prod_{a=1}^{n}dq_j^a,\qquad \frac{dp_j}{2\pi}=\prod_{a=1}^{n}\frac{dp_{aj}}{2\pi},\qquad p_jq_k=p_{aj}q_k^a, \tag{24}$$

(自由度の添字 a について Einstein の規約) などと理解すれば，そのまま正しいことは明白である。

配位空間における経路積分　簡単な系 (1) の場合に戻って，位相空間経路積分の表式 (14) の第1式で dp_j $(j=0,1,\cdots,N)$ 積分を先に行ってしまおう。exp の指数部に各 p_j が ($\dot q_j\equiv(q_{j+1}-q_j)/\Delta t$ として)

$$i\Delta t\left[p_j\dot q_j-\frac{1}{2}p_j^2\right]=i\Delta t\left[-\frac{1}{2}(p_j-\dot q_j)^2+\frac{1}{2}\dot q_j^2\right] \tag{25}$$

の形で現れていることに注意して $p_j\to p_j'=p_j-\dot q_j$ の変数変換を行い，次の Gauss (ガウス) [-Fresnel (フレネル)] 積分の公式

$$\int dx\, e^{-i\frac{1}{2}ax^2}=\sqrt{\frac{2\pi}{ia}} \tag{26}$$

を使えば，(14) は

$$\langle q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}} | q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}} \rangle = \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \frac{1}{\sqrt{2\pi i \varDelta t}} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{dq_j}{\sqrt{2\pi i \varDelta t}} \right)$$

$$\times \exp i \sum_{j=0}^{N} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\varDelta t} \right)^2 - V\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right) \right] \varDelta t$$

$$= \int \mathscr{D}q \exp i \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} dt \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2(t) - V(q(t)) \right]$$

$$= \int_{q(t_{\mathrm{I}})=q_{\mathrm{I}}}^{q(t_{\mathrm{F}})=q_{\mathrm{F}}} \mathscr{D}q \exp\left[i \int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} dt\, L(q(t), \dot{q}(t)) \right] \tag{27}$$

となる。第 2 行は第 1 行の略記で，第 3 行へは $(1/2)\dot{q}^2 - V(q)$ が (1) の系の古典 Lagrangian L であることを使った。すなわち，[大変特異な積分測度 $dq_j/\sqrt{2\pi i \varDelta t}$ $(\varDelta t = (t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}})/N \to 0)$ を伴っているが] $\exp\left[i \int dt\, L(q, \dot{q}) \right]$ を配位空間における各々の経路 $\{q(t)\}_{t_{\mathrm{I}} \leq t \leq t_{\mathrm{F}}}$ の確率振幅として，それをあらゆる経路について足し上げた形の，配位空間での経路積分の表式 (27) を得た。この形 (27) がもともとの Feynman の提唱した経路積分公式である。

しかしながら，実は，(1) のように簡単でない一般の系の場合は，$\mathscr{D}q$ 経路積分の被積分関数は必ずしも古典的作用積分 $S = \int dt\, L$ の i 倍の指数関数という形にはならない。

このことをあらわに見るため，古典論の段階で Lagrangian L が

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b \qquad (a, b = 1, 2, \cdots, n) \tag{28}$$

で与えられるような n 自由度系を考えてみよう。ここで $\dot{q} = dq/dt$. [力学変数 q^a は，計量が g_{ab} で与えられるある n 次元多様体 (manifold) 上の点を表す座標 $(q^1, q^2, \cdots, q^n)$ とみなすことができる。]　この系の古典論における正準運動量変数，および Hamiltonian H は

$$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = g_{ab}(q) \dot{q}^b, \tag{29}$$

$$H(p, q) \equiv p_a \dot{q}^a - L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g^{ab}(q) p_a p_b \tag{30}$$

となる。ただし g^{ab} は g_{ab} の逆行列である。さて，この系を量子論で考えると，(30) の Hamiltonian の表式で演算子 $\boldsymbol{q}^a, \boldsymbol{p}_a$ をどういう順序にとるのか問題が生ずる。これは，しかし，どの順序が正しくてどの順序が間違っているとかいう問題ではなく，どの順序をとってもそれぞれ“正しく”，違っ

た順序をとった $\boldsymbol{H}$ は違った量子力学系を定義するというだけのことである。[しかし，対称性の要求からある種の“自然な順序”が選ばれるということはある(演習問題 4.2 参照)。]

ここでは Weyl 順序をとった

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\{g^{ab}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}_a\boldsymbol{p}_b\}_{\mathrm{W}} \tag{31}$$

を量子系の Hamiltonian として採用する。そうすれば，この $\boldsymbol{H}$ の Weyl 変換 $H(p,q)$ は (30) そのものであるから，この系の遷移振幅に対する位相空間経路積分表式は (14),(24) より (再び $\dot{q}_j^a\equiv(q_{j+1}^a-q_j^a)/\Delta t$ として)

$$\begin{aligned}&\langle q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\, q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle\\&=\lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\frac{dp_0}{(2\pi)^n}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{dp_j\, dq_j}{(2\pi)^n}\right)\exp i\sum_{j=0}^{N}\left[p_{aj}\dot{q}_j^a-\frac{1}{2}g^{ab}(\bar{q}_j)p_{aj}p_{bj}\right]\Delta t\end{aligned} \tag{32}$$

となる。ここで，1 自由度の場合と同様に

$$p_{aj}\ \longrightarrow\ p'_{aj}=p_{aj}-g_{ab}(\bar{q}_j)\dot{q}_j^b \tag{33}$$

の変数変換を行い，(26) の Gauss 積分公式で，x を n 次元ベクトル $\vec{x}$ に，係数 a を $n\times n$ 対称行列 A にそれぞれ拡張した次の公式

$$\int d\vec{x}\,\exp\left(-i\frac{1}{2}\vec{x}^{\,T}A\vec{x}\right)=\left(\frac{2\pi}{i}\right)^{\frac{n}{2}}[\det A]^{-\frac{1}{2}} \tag{34}$$

(これも Gauss 積分公式と呼ぶ) を使えば，

$$\begin{aligned}&\langle q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\, q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle\\&=\lim_{N\to\infty}\int\cdots\int(2\pi i\Delta t)^{-n/2}\prod_{j=1}^{N}\frac{dq_j}{(2\pi i\Delta t)^{n/2}}\cdot\prod_{j=0}^{N}[\det g_{ab}(\bar{q}_j)]^{\frac{1}{2}}\\&\qquad\times\exp i\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{1}{2}g_{ab}(\bar{q}_j)\dot{q}_j^a\dot{q}_j^b\right]\Delta t\\&=\int\mathcal{D}q\,\exp i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt\left[L(q(t),\dot{q}(t))-i\frac{\delta(0)}{2}\ln\det g_{ab}(q(t))\right]\end{aligned} \tag{35}$$

を得る。ただし，最後の変形に

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{N}(D(\bar{q}_j))^{\frac{1}{2}}&=\exp\left\{\frac{1}{\Delta t}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\Delta t\left(\frac{1}{2}\ln D(\bar{q}_j)\right)\right\}\\&\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\ \exp\left\{\delta(t=0)\cdot\int dt\,\frac{1}{2}\ln D(q(t))\right\}\end{aligned} \tag{36}$$

を使った。(35) の結果を見ると，この場合の配位空間の経路積分は，指数部が古典的な Lagrangian L (28) から $\delta(0)$ に比例する項だけずれていることがわかる。

いくぶん脱線になるが，この例におけるずれの項は Lee-Yang 項と呼ばれるもので，その存在理由は次のように理解できる。古典的 Lagrangian (28) は，座標変換 $q^a(t) \rightarrow Q^a(t)$； $q^a(t)=q^a(Q(t))$ のうち

$$g_{ab}(q(Q))\frac{\partial q^a}{\partial Q^c}\frac{\partial q^b}{\partial Q^d}=g_{cd}(Q) \tag{37}$$

を満たすような変換の下で不変である：すなわち，$L(q,\dot{q})=L(Q,\dot{Q})$. しかるに，経路積分測度 $\mathcal{D}q$ は

$$\mathcal{D}q \propto \prod_j dq_j=\prod_j dQ_j \det\left|\frac{\partial q_j^a}{\partial Q_j^b}\right|=\prod_j dQ^j\left[\frac{\det g(Q_j)}{\det g(q_j)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

と変換するから，Lee-Yang 項 $\Pi|\det g|^{\frac{1}{2}}$ を入れておいて初めてちょうど不変になっているのである。一方位相空間における経路積分表式の方は，この不変性は自動的であった。なぜなら，(運動量変数に依存しない) 座標変換 $q^a \rightarrow Q^a$ は点変換 (point transformation) と呼ばれる正準変換の一部なのであるが，積分測度 $dp_j\, dq_j$ や $p_j\dot{q}_j$ などは正準変換の不変量であって，$H(p,q)$ を不変に保つような正準変換については，位相空間での経路積分表式は明白に不変であるからである。

4-2　場の理論における経路積分

ここでもまた簡単のため，Lagrangian 密度が

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\phi}\,\partial^\mu\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{2}\mu^2\boldsymbol{\phi}^2+\mathcal{L}_{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}) \tag{1}$$

で与えられる 1 成分実スカラー場 $\boldsymbol{\phi}(x)$ の系を考えよう。この系の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H}=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2(x)+V(\boldsymbol{\phi}(x))\right]=\int d^3x\, \mathcal{H}(\boldsymbol{\pi}(x),\boldsymbol{\phi}(x)), \tag{2}$$

$$V(\boldsymbol{\phi})=\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\boldsymbol{\phi})^2+\frac{1}{2}\mu^2\boldsymbol{\phi}^2-\mathcal{L}_{\text{int}}(\boldsymbol{\phi}), \tag{3}$$

である。前節の量子力学系と同様，Schrödinger 表示の演算子 $\boldsymbol{\phi}(\vec{x}),\boldsymbol{\pi}(\vec{x})$ と Heisenberg 演算子 $\boldsymbol{\phi}(x),\boldsymbol{\pi}(x)$ との関係は

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{x},t)=e^{i\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{\phi}(\vec{x})e^{-i\boldsymbol{H}t},\qquad \boldsymbol{\pi}(\vec{x},t)=e^{i\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{\pi}(\vec{x})e^{-i\boldsymbol{H}t}, \tag{4}$$

Schrödinger 演算子 $\boldsymbol{\phi}(\vec{x})$ の固有状態と Heisenberg 演算子 $\boldsymbol{\phi}(\vec{x},t)$ の固有状態

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{x})|\phi\rangle=\phi(\vec{x})|\phi\rangle,\qquad \boldsymbol{\phi}(\vec{x},t)|\phi,t\rangle=\phi(\vec{x})|\phi,t\rangle \tag{5}$$

の間の関係は,

$$|\phi, t\rangle = e^{iHt}|\phi\rangle \tag{6}$$

で与えられる。これらからも明らかであるが, 場の理論というのは, 単に連続パラメータ $\vec{x}\in\boldsymbol{R}^3$ で指定される無限個の座標変数 $\{\boldsymbol{\phi}(\vec{x})\}_{\vec{x}\in\boldsymbol{R}^3}$ を持った無限自由度量子力学系とみなせる。したがって, 前節の多自由度量子力学系 $\{\boldsymbol{q}^a\}$ の場合の離散的添字 a を連続的添字 $\vec{x}$ に形式的に読み換えれば, そのままの公式が成り立つ。それゆえ, **4-1** の (14), (24) より, ただちに

$$\begin{aligned}&\langle\phi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\phi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle\\ &=\int_{\phi(\vec{x},t_{\mathrm{I}})=\phi_{\mathrm{I}}(\vec{x})}^{\phi(\vec{x},t_{\mathrm{F}})=\phi_{\mathrm{F}}(\vec{x})}\mathcal{D}\pi\,\mathcal{D}\phi\,\exp i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}d^4x\,[\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathcal{H}(\pi(x),\phi(x))]\end{aligned} \tag{7}$$

を得る。ただし, ここの経路積分は, 時間方向 (歴史) と空間方向 (自由度) の双方にわたる 4 次元的なものであることに注意しよう: 標記的に

$$\mathcal{D}\phi \propto \prod_{t_{\mathrm{I}}\leqq t\leqq t_{\mathrm{F}}}\prod_{\vec{x}\in\boldsymbol{R}^3}d\phi(\vec{x}, t). \tag{8}$$

次に, $\mathcal{D}\pi$ 積分を先に遂行すべく, 多変数の場合の Gauss 積分公式 **4-1** (34) を連続 4 次元添字 $x=(\vec{x}, t)$ の場合に拡張する:

$$\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[-i\int d^4x\,d^4y\,\frac{1}{2}\phi(x)A(x,y)\phi(y)\right]\propto \mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}}A \tag{9}$$

大文字の Det は, 4 次元関数空間上の行列 $A_{x,y}=A(x,y)$ の意味の行列式を表し, 汎関数行列式 (functional determinant) とも呼ばれる。**4-1** (34) の $(2\pi/i)$ のべきの定数因子は左辺の $\mathcal{D}\phi$ の測度の定義にくりこめば, (9) は等号にしてよい。が, 以下ではどのみち比例関係だけで充分である。(7) の $\mathcal{H}$ に (2) を代入し, (9) を使って, (7) の $\mathcal{D}\pi$ 積分を前節同様に遂行すれば

$$\begin{aligned}&\langle\phi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\phi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle\\ &=N\int\mathcal{D}\phi\,\exp i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-\mu^2\phi^2)+\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

を得る。すなわち, 指数部が古典的作用積分で与えられる素朴な Feynman の公式が得られる。一般に場の理論では, ほとんどすべての興味ある場合, 運動量変数の 2 次の項 $(1/2)\pi^2$ の係数は 1 であって場の量に依存しないので, Lee-Yang 項のようなものは現れず, 素朴な Feynman の公式が正しいのである。(10) で N は, $\mathcal{D}\pi$ や $\mathcal{D}\phi$ の積分測度を定数因子部分まできっちり指定していないことに起因する, ある比例定数因子である。

Green 関数に対する経路積分　次に一般化された Green 関数を

$$\begin{aligned}
&G^{(n)}(x_1\cdots x_n\,;\,\Psi_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}\,;\,\Psi_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}})\\
&\qquad\equiv\frac{\langle\Psi_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|\,\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)\,|\,\Psi_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}\rangle}{\langle\Psi_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|\,\Psi_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}\rangle}\\
&\qquad=\frac{\langle\Psi_{\mathrm{F}}|e^{-iHt_{\mathrm{F}}}\mathrm{T}[\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)]e^{iHt_{\mathrm{I}}}|\Psi_{\mathrm{I}}\rangle}{\langle\Psi_{\mathrm{F}}|\,e^{-iH(t_{\mathrm{F}}-t_{\mathrm{I}})}|\,\Psi_{\mathrm{I}}\rangle}
\end{aligned}\tag{11}$$

で定義し，その経路積分表式を求めよう。ただし $t_{\mathrm{I}}\leqq x_i^0\equiv t_i\leqq t_{\mathrm{F}}$ とする。この一般化された Green 関数は，特に初期および終状態 $|\Psi_{\mathrm{I}}\rangle$, $|\Psi_{\mathrm{F}}\rangle$ を系の真空 $|0\rangle$ にとったとき ($\boldsymbol{H}|0\rangle=0$ のため $t_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{F}}$ によらなくなり)，3-3 (13) で定義した通常の n 点 Green 関数

$$G^{(n)}(x_1\cdots x_n)=\langle 0|\,\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)\,|0\rangle \tag{12}$$

に帰着することに注意したい。

(11) を，時間引数の順序が $t_1\leqq t_2\leqq\cdots\leqq t_n$ となっているとき，各時刻 t_i $(i=\mathrm{I},1,2,\cdots,n,\mathrm{F})$ での完全系

$$\begin{aligned}
&\int\prod_{\vec{x}_i}d\phi(\vec{x}_i,t_i)\,|\,\phi(t_i),t_i\rangle\langle\phi(t_i),t_i|=1,\\
&\qquad(\,\boldsymbol{\phi}(x_i)\,|\,\phi(t_i),t_i\rangle=\phi(\vec{x}_i,t_i)\,|\,\phi(t_i),t_i\rangle\,)
\end{aligned}\tag{13}$$

をはさんで，($t_0=t_{\mathrm{I}}$, $t_{n+1}=t_{\mathrm{F}}$ と記して)

[(11) の分子]

$$\begin{aligned}
&=\int\cdots\int\prod_{i=0}^{n+1}\Bigl(\prod_{\vec{x}_i}d\phi(\vec{x}_i,t_i)\Bigr)\langle\Psi_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|\,\phi(t_{\mathrm{F}}),t_{\mathrm{F}}\rangle\\
&\quad\times\langle\phi(t_{\mathrm{F}}),t_{\mathrm{F}}|\,\boldsymbol{\phi}(x_n)\,|\,\phi(t_n),t_n\rangle\cdots\langle\phi(t_2),t_2|\,\boldsymbol{\phi}(x_1)\,|\,\phi(t_1),t_1\rangle\\
&\quad\times\langle\phi(t_1),t_1|\,\phi(t_{\mathrm{I}}),t_{\mathrm{I}}\rangle\langle\phi(t_{\mathrm{I}}),t_{\mathrm{I}}|\,\Psi_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}\rangle
\end{aligned}\tag{14}$$

と書き直す。Heisenberg 演算子 $\boldsymbol{\phi}(x_i)$ はこの段階で固有値 $\phi(x_i)$ に置き換え，中間に現れる内積 $\langle\phi(t_{i+1}),t_{i+1}|\,\phi(t_i),t_i\rangle$ $(i=0,1,\cdots,n)$ に関しては，それぞれ (10) の経路積分表式を代入し， 両端の内積については 初期・終状態の波動汎関数 (wave-functional) $\Psi^*_{\mathrm{F}}[\phi(t_{\mathrm{F}})]$, $\Psi_{\mathrm{I}}[\phi(t_{\mathrm{I}})]$ を用いて，(11) は結局

$$\begin{aligned}
&G^{(n)}(x_1\cdots x_n\,;\,\Psi_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}\,;\,\Psi_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}})\\
&\qquad=N_{\mathrm{FI}}\int\mathcal{D}\phi\;\Psi^*_{\mathrm{F}}[\phi(t_{\mathrm{F}})]\,\Psi_{\mathrm{I}}[\phi(t_{\mathrm{I}})]\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\\
&\qquad\qquad\times\exp\Bigl[i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}d^4x\;\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)\Bigr]
\end{aligned}\tag{15}$$

と書けることがわかる。N_{FI} は (10) の比例定数や (11) の分母からくる x_i に依存しない定数である。この導出の際 $t_1\leqq t_2\leqq\cdots\leqq t_n$ の順を仮定した

が，この順序以外でも同じく(15)が得られる。例えば $t_{i_1}\leqq t_{i_2}\leqq\cdots\leqq t_{i_n}$ の順の場合，(14)は添字 $1,2,\cdots,n$ を $i_1,i_2,\cdots,i_n$ に置き換えた式となるが，演算子 $\boldsymbol{\phi}(x_i)$ を c 数の固有値 $\phi(x_i)$ に直すともはや順序に関係なく $\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$ が出，残りの遷移振幅部分 $\langle\phi(t_i),t_i|\phi(t_j),t_j\rangle$ もうまく時間的につながった列で出てくるので，(15)にまとまるのである†。

Green 関数の生成汎関数　一般化された n 点 Green 関数(11)の生成汎関数(generating functional) $Z_{\rm FI}[J]$ を次式で定義しよう：

$$Z_{\rm FI}[J]$$
$$\equiv\langle\Psi_{\rm F},t_{\rm F}|\,{\rm T}\exp[i\int d^4x\,J(x)\boldsymbol{\phi}(x)]\,|\Psi_{\rm I},t_{\rm I}\rangle\Big/\langle\Psi_{\rm F},t_{\rm F}|\Psi_{\rm I},t_{\rm I}\rangle \qquad (16)$$

ただし $J(x)$ の台(support)は $t_{\rm I}\leqq x^0\leqq t_{\rm F}$ の区間内にあると仮定する。これを $J(x_1),\cdots,J(x_n)$ で微分し $J=0$ とおけば明らかに(11)の Green 関数($\times i^n$)が得られるから，確かに生成汎関数となっている：

$$Z_{\rm FI}[J]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\,J(x_1)\cdots J(x_n)G^{(n)}(x_1\cdots x_n\,;\,\Psi_{\rm F},t_{\rm F}\,;\,\Psi_{\rm I},t_{\rm I}). \qquad (17)$$

一般化された n 点 Green 関数に対する経路積分表式(15)から，ただちに

$$Z_{\rm FI}[J]=N_{\rm FI}\int\mathcal{D}\phi\;\Psi_{\rm F}^*[\phi(t_{\rm F})]\,\Psi_{\rm I}[\phi(t_{\rm I})]\exp i\int_{t_{\rm I}}^{t_{\rm F}}d^4x[\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)+J(x)\phi(x)] \qquad (18)$$

を得る。比例定数因子 $N_{\rm FI}$ を逃れる最も手っとり早い方法は，$Z_{\rm FI}[J=0]=1$ であるからそれで割算をすることである：

$$Z_{\rm FI}[J]=\frac{\int\mathcal{D}\phi\,\Psi_{\rm F}^*\,\Psi_{\rm I}\exp i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}{\int\mathcal{D}\phi\,\Psi_{\rm F}^*\,\Psi_{\rm I}\exp i\int d^4x\,\mathcal{L}}. \qquad (19)$$

この表式では，もはや $\mathcal{D}\phi$ の測度(や $\Psi_{\rm F},\Psi_{\rm I}$)の規格化の規約に依存しなくなることに注意したい。(19)では，明白な，指数部の積分 $\int_{t_{\rm I}}^{t_{\rm F}}d^4x$ の範囲 $[t_{\rm I},t_{\rm F}]$ および $\Psi_{\rm F}$ や $\Psi_{\rm I}$ の引数関数 $\phi(t_{\rm F}),\phi(t_{\rm I})$ を省略した。

再び，$|\Psi_{\rm I}\rangle=|\Psi_{\rm F}\rangle=|0\rangle$ にすれば，(16)の $Z_{\rm FI}[J]$ は通常の n 点 Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ に帰着することがわかる。(16),(17),(18)より

---

† すなわち，経路積分では T 積の Green 関数というのは自然な概念であり，逆に T 積以外の Green 関数は経路積分で表しにくい，ということである(**4-3** 節末参照)。

$$
\begin{aligned}
Z[J] &\equiv \langle 0|\mathrm{T}\exp[i\int d^4x\, J(x)\boldsymbol{\phi}(x)]\,|0\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\, J(x_1)\cdots J(x_n)G^{(n)}(x_1\cdots x_n) \\
&= N_{00}\int \mathcal{D}\phi\ \Psi_0^*[\phi(+\infty)]\,\Psi_0[\phi(-\infty)] \\
&\qquad\qquad \times\exp i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)+J(x)\phi(x)]
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

となる。ただし $J(x)$ の台に対する制限を外すために $t_{\mathrm{F}}\to+\infty$, $t_{\mathrm{I}}\to-\infty$ とした。

$-i\epsilon$ 処法と初期・終状態　一般化された Green 関数 (11) は，$t_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{F}}$ を有限にとどめておく限り，きわめて境界の状態 $|\Psi_{\mathrm{I}}\rangle, |\Psi_{\mathrm{F}}\rangle$ に依存している。例えば 2 点関数のとき，境界 $t=t_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{F}}$ で $\phi(\vec{x})$ の定まった状態をとれば Dirichlet (ディリクレ) 型の Green 関数が，$\dot{\phi}(\vec{x})=0$ の状態をとれば Neumann (ノイマン) 型の Green 関数が，現れるといったふうにである。

しかし，$t_{\mathrm{I}}\to-\infty$, $t_{\mathrm{F}}\to+\infty$ の極限を (極限が存在するようにうまく) とると，こういう種々な Green 関数は皆同じ (Feynman 型の) ものに収束し，境界の状態 $|\Psi_{\mathrm{I}}\rangle, |\Psi_{\mathrm{F}}\rangle$ への依存性は実質上なくなってしまう。この際，しばしばとられる方法が，「Lagrangian の質量項 $-1/2\mu^2\phi^2$ のパラメータ μ^2 を $\mu^2-i\epsilon$ に形式的に置き換え，すべての計算の後に $\epsilon\to0$ の極限をとる」という “$-i\epsilon$ 処法” と呼ばれるトリックである。

この処法を行う理由として，通常，「(15) や (18) の $\mathcal{D}\phi$ 積分の収束性をよくし経路積分を well-defined にするため」との説明がなされる。確かに μ^2 を $\mu^2-i\epsilon$ にすれば (15) や (18) の経路積分の被積分関数に

$$
\exp\left[-\epsilon\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}} d^4x\,\frac{1}{2}\phi^2(x)\right] \qquad (21)
$$

の因子が余分にかかることになる。ϕ が大きくなったとき，この因子はもとの $\exp[i\int d^4x\ \mathcal{L}]$ のように振動するのではなく実際に絶対値を小さくさせるから $\mathcal{D}\phi$ 積分の収束性をよくする。また，実際，後にあらわに見るように ($t_{\mathrm{I}}\to-\infty$, $t_{\mathrm{F}}\to+\infty$ で) 自由場の場合，ϕ^2 の係数演算子 $\Box+\mu^2$ が運動量表示で 0 になる点を生ずるから，$i\epsilon$ 項をつけて初めて $\mathcal{D}\phi$ 積分が well-defined になる。

しかしこの説明では，$t_{\mathrm{I}}\to-\infty$, $t_{\mathrm{F}}\to\infty$ での境界の状態 $|\Psi_{\mathrm{I}}\rangle, |\Psi_{\mathrm{F}}\rangle$ のとり方に依存しなくなる理由が全然明らかにされないので，次にそれを説明

しよう。μ^2 を $\mu^2-i\epsilon$ と置き換えることは，(11) の演算子形式表式で考えると，時間発展演算子 e^{-iHt} や Heisenberg 演算子 $\boldsymbol{\phi}(x)=e^{iHt}\boldsymbol{\phi}(\vec{x})e^{-iHt}$ の中の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ をすべて

$$\boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{H}-i\epsilon\int d^3x\ \boldsymbol{\phi}^2(\vec{x})/2 \equiv \boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2 \tag{22}$$

で置き換えることと等価である。この $\boldsymbol{H}$ の置き換えは，$t_{\rm I}\to-\infty$，$t_{\rm F}\to+\infty$ の極限を考えると，(11) で ($x_1 \sim x_n$ の時間が有限にとどまっている限り) $e^{-iHt_{\rm F}}$ と $e^{iHt_{\rm I}}$ の因子でのみ重要となる。それゆえ，(11) は

$$(11)=\frac{\langle\Psi_{\rm F}|\,e^{-i(\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2)t_{\rm F}}{\rm T}[\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)]e^{i(\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2)t_{\rm I}}|\,\Psi_{\rm I}\rangle}{\langle\Psi_{\rm F}|\,e^{-i(\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2)t_{\rm F}}e^{i(\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2)t_{\rm I}}|\,\Psi_{\rm I}\rangle} \tag{23}$$

となる。$\boldsymbol{H}$ の固有値と固有状態を $\{E_n, |n\rangle\}$，また，$\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2$ のそれを $\{E'_n, |n'\rangle\}$ とすれば，摂動論より，特に

$$E'_n=E_n-i\epsilon\langle n|\boldsymbol{\phi}^2|n\rangle+O(\epsilon^2). \tag{24}$$

$\boldsymbol{H}'$ 系の完全系 $\sum_n|n'\rangle\langle n'|=1$ を用いて，(23) の例えば $t_{\rm I}$ 側の因子を

$$\begin{aligned}e^{i(\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2)t_{\rm I}}|\Psi_{\rm I}\rangle&=\sum_n e^{iE'_nt_{\rm I}}|n'\rangle\langle n'|\Psi_{\rm I}\rangle\\&=e^{\epsilon t_{\rm I}\langle0|\boldsymbol{\phi}^2|0\rangle}\Bigl[|0'\rangle\langle0'|\,\Psi_{\rm I}\rangle+\sum_{n\neq0}e^{\epsilon w_nt_{\rm I}}e^{iE_nt_{\rm I}}|\,n'\rangle\langle n'|\,\Psi_{\rm I}\rangle\Bigr]\end{aligned} \tag{25}$$

と書き直すことができる。ここで w_n は

$$w_n\equiv\langle n|\boldsymbol{\phi}^2|n\rangle-\langle0|\boldsymbol{\phi}^2|0\rangle \tag{26}$$

で定義される量で，状態 $|n\rangle$ での $\boldsymbol{\phi}^2\equiv\int d^3x\,(1/2)\boldsymbol{\phi}^2(x)$ の“拡がり”の程度 (から真空のそれを引いたもの) を表す。この量は $\langle0|\boldsymbol{\phi}(x)|0\rangle=0$ となる場の変数を選んでいる限り，真空以外の励起状態 $|n\rangle$ の方が $\boldsymbol{\phi}(x)=0$ からのゆらぎの程度が基底状態 $|0\rangle$ よりも当然大きいと期待されるから，$w_n>0$ $(n\neq0)$ と仮定してよいだろう†。そうすれば (25) の第 2 式第 2 項の $\sum_{n\neq0}$ の項は $e^{\epsilon w_nt_{\rm I}}$ の因子のせいで $t_{\rm I}\to-\infty$ の極限で，$\langle0'|\,\Psi_{\rm I}\rangle\neq0$ である限り第 1 項に比べて，すべて無視できる。全く同様なことが (23) の $t_{\rm F}$ 側の因子 $\langle\Psi_{\rm F}|\,e^{-i(\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{\phi}^2)t_{\rm F}}$ に対しても $t_{\rm F}\to+\infty$ の極限でいえるから，(23) より

$$\begin{aligned}&\lim_{-t_{\rm I},t_{\rm F}\to\infty}G^{(n)}(x_1\cdots x_n;\ \Psi_{\rm F},t_{\rm F};\ \Psi_{\rm I},t_{\rm I})\\&=\lim\frac{\langle\Psi_{\rm F}|0\rangle e^{-\epsilon t_{\rm F}\langle0|\boldsymbol{\phi}^2|0\rangle}\langle0|{\rm T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)|0\rangle e^{\epsilon t_{\rm I}\langle0|\boldsymbol{\phi}^2|0\rangle}\langle0|\,\Psi_{\rm I}\rangle}{\langle\Psi_{\rm F}|0\rangle e^{-\epsilon t_{\rm F}\langle0|\boldsymbol{\phi}^2|0\rangle}\langle0|0\rangle e^{\epsilon t_{\rm I}\langle0|\boldsymbol{\phi}^2|0\rangle}\langle0|\,\Psi_{\rm I}\rangle}\\&=\langle0|{\rm T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)|0\rangle\end{aligned} \tag{27}$$

---

† 自由場の場合はもちろんあらわに確かめることができる。

を得る。すなわち，一般化された Green 関数は，$t_{\rm I}\to-\infty$, $t_{\rm F}\to\infty$ の極限で，$(|\Psi_{\rm I}\rangle, |\Psi_{\rm F}\rangle$ の真空との重なりが少しでもある限り) $|\Psi_{\rm I}\rangle, |\Psi_{\rm F}\rangle$ に全く依存しなくなり，真空期待値の通常の Green 関数 (12) に一致する。これが示したかったことである。

この事実を使うと，$Z[J]$ の経路積分の表式 (20) においても，すでに，$t_{\rm I}\to-\infty$, $t_{\rm F}\to+\infty$ の表式であり，$-i\epsilon$ 処法をとれば真空が自動的に選ばれるのだから，とりたてて境界の真空の波動汎関数を書く必要がなくなる。それゆえ

$$
Z[J] = N_{00}\int\mathcal{D}\phi\exp i\int d^4x\left[\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)+i\epsilon\frac{1}{2}(\phi(x)-\langle\phi\rangle)^2+J(x)\phi(x)\right] \tag{28}
$$

と書いてよい。ただし，$-i\epsilon$ 処法の $\boldsymbol{\phi}^2$ 項の場 $\boldsymbol{\phi}(x)$ は真空期待値が 0 の場であることをあらわに表すため $\langle\phi\rangle\equiv\langle 0|\boldsymbol{\phi}(x)|0\rangle$ を引いておいた。こう書くと，(真空の波動汎関数 Ψ_0 を落としたが) $i\epsilon$ 項が必要最小限の真空の情報を含んでいることが了解されるだろう (演習問題 4.3 参照)。

Euclid 化との関連　上で (26) の w_n に対し $w_n>0$ $(n\neq0)$ を仮定したが，その仮定は一般の相互作用系に対しては，もっともらしいといっても，いつでも成立するという保証があるわけではない。それならば，いっそのこと，質量項 $\boldsymbol{\phi}^2=\int d^3x(1/2)\boldsymbol{\phi}^2(x)$ などとけちなことをいわず，全系の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ を使って，$-i\epsilon\boldsymbol{H}$ を挿入すればよいだろう，というアイデアもある。実際，これなら (25) に w_n として出てくるのは

$$
\begin{aligned}
w_n &= \langle n|\boldsymbol{H}|n\rangle-\langle 0|\boldsymbol{H}|0\rangle \\
&= E_n-E_0
\end{aligned} \tag{29}
$$

であるので，スペクトル条件から $w_n>0$ $(n\neq0)$ が保証されている。

この $-i\epsilon\boldsymbol{H}$ のトリックは，全系の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ を

$$
\boldsymbol{H}-i\epsilon\boldsymbol{H}=e^{-i\epsilon}\boldsymbol{H} \qquad (\epsilon\ll1) \tag{30}
$$

に置き換えることに等しい。(11) の Green 関数の表式を見ると，この置き換えは，また，$\boldsymbol{H}$ をそのままにしてあらゆる時間変数を**一斉に** $e^{-i\epsilon}$ 倍することに等しい：

$$
(t_1, t_2, \cdots, t_n\,;\ t_{\rm I}, t_{\rm F}) \longrightarrow e^{-i\epsilon}(t_1, t_2, \cdots, t_n\,;\ t_{\rm I}, t_{\rm F}). \tag{31}
$$

このとき，対応する Green 関数の経路積分表式は，(15) に代わって

$$N_{\mathrm{FI}}\int\mathcal{D}\phi\,\Psi_{\mathrm{F}}^{*}[\phi(t_{\mathrm{F}})]\Psi_{\mathrm{I}}[\phi(t_{\mathrm{I}})]\phi(\vec{x}_1,t_1)\cdots\phi(\vec{x}_n,t_n)$$

$$\times\exp\left[ie^{-i\epsilon}\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt\,d^3x\left\{\frac{1}{2}[e^{2i\epsilon}(\partial_t\phi)^2-(\vec{\nabla}\phi)^2-\mu^2\phi^2]+\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right\}\right] \tag{32}$$

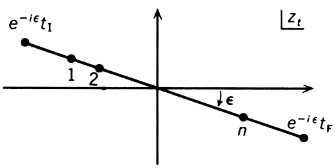
となることがわかる。誤解のないようにいっておくと，この経路積分に現れている c 数の場 $\phi(\vec{x},t)$ というのは，(4) の Heisenberg 演算子の定義式で時間 t を複素数化した複素時間 Heisenberg 演算子

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{x},z_t)=e^{iHz_t}\boldsymbol{\phi}(\vec{x})e^{-iHz_t}\qquad(z_t\in\boldsymbol{C}), \tag{33}$$

の時刻 $z_t=e^{-i\epsilon}t$ における固有値である：

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{x},e^{-i\epsilon}t)|\phi(t),t\rangle=\phi(\vec{x},t)|\phi(t),t\rangle. \tag{34}$$

すなわち，$\phi(\vec{x},t)$ の t は，実際の時間変数 z_t ではなく，複素 z_t 平面上の直線 $z_t=e^{-i\epsilon}t$，の上の点をパラメトライズする実パラメータである。(32) の経路積分は，したがって，4·2 図に示すような複素時間 z_t 平面上の直線に沿っての“時間発展”の経路に関する経路積分である。



4·2 図

ここまで $\epsilon\ll1$ としてきたが，ϵ を有限の角 $\pi/2$ とすれば，(32) の指数関数部分は Euclid 化した理論の重み関数

$$\exp\left[-\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt\,d^3x\left\{\frac{1}{2}[\dot{\phi}^2+(\vec{\nabla}\phi)^2+\mu^2\phi^2]-\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right\}\right] \tag{35}$$

の形を持つようになる。この重み関数は ϕ が大きくなると振動ではなく本当に小さくなる性質のよいもので，経路積分の数学的に厳密な取り扱いもこの Euclid 版で初めて可能となる。

Minkowski 空間のもとの理論で，時間変数を (31) のように置き換えておけば，$\epsilon=\pi/2$ で性質のよい Euclid 化した理論になり，$\epsilon\to+0$ でもとの Minkowski 理論になる，というわけである。文献によっては，$\epsilon\to\pi/2$ のプロセスを解析接続とか Wick (ウィック) 回転と呼んでいるが，この用語はあまり適切ではない。すなわち (31) の示すように多数の時間変数を一斉に動かしているので，一変数や多変数複素関数の解析接続とは別物である。ただ 2 点 Green 関数 $G^{(2)}$ (で $-t_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{F}}\to\infty$) のときだけは，1 変数 $t=t_2-t_1$ のみの関数となるので，この操作が t の解析接続と同じになる。

有限温度系への応用　話は少しそれるが，経路積分の同じ技法が適用できる有限温度系に関してここでコメントしておく。温度が T の熱平衡にある系の分配関数 (partition function) は，系の Hamiltonian を $\boldsymbol{H}$ として

$$Z \equiv \mathrm{tr}\, e^{-\beta \boldsymbol{H}} \qquad \left(\beta \equiv \frac{1}{kT}\right) \tag{36}$$

で与えられる。松原は，統計演算子 $e^{-\beta \boldsymbol{H}}$ が，形式上，時間が純虚数 $t=-i\beta$ の時間発展演算子 $e^{-i\boldsymbol{H}t}$ とみなせることに着目し，虚時間 $t\equiv -i\tau$ の Heisenberg 演算子

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{x}, -i\tau) \equiv e^{\tau \boldsymbol{H}} \boldsymbol{\phi}(\vec{x}) e^{-\tau \boldsymbol{H}}, \tag{37}$$

および，その，虚時間 (実) パラメータ τ についての T 積の Green 関数

$$G_\beta^{(n)}(\vec{x}_1, -i\tau_1\,;\cdots;\,\vec{x}_n, -i\tau_n) \equiv \frac{\mathrm{tr}[e^{-\beta \boldsymbol{H}} \mathrm{T}_\tau \boldsymbol{\phi}(\vec{x}_1, -i\tau_1)\cdots \boldsymbol{\phi}(\vec{x}_n, -i\tau_n)]}{Z} \tag{38}$$

という概念を導入し，摂動展開などの場の理論の手法がそのまま量子統計力学に持ってこれることを初めて示した。(38) は松原 Green 関数または (虚時間) 温度 Green 関数と呼ばれる。汎関数

$$Z_\beta[J] \equiv \mathrm{tr}\left\{e^{-\beta \boldsymbol{H}} \mathrm{T}_\tau \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\, J(\vec{x}, -i\tau)\boldsymbol{\phi}(\vec{x}, -i\tau)\right]\right\} \tag{39}$$

を定義すれば，$Z_\beta[J=0]$ は分配関数 Z を，$Z_\beta[J]/Z$ は松原 Green 関数の生成汎関数を与える。

この有限温度系に経路積分の技法を適用しよう。ここでも簡単のため，Lagrangian $\mathcal{L}$ および Hamiltonian $\boldsymbol{H}$ が (1), (2) で与えられる一成分実スカラー場 $\boldsymbol{\phi}(x)$ の系をとって考えることにする。まず，そのようなボソン系の完全系は Schrödinger 場 $\boldsymbol{\phi}(\vec{x}, t=0)=\boldsymbol{\phi}(\vec{x})$ の固有状態 $\{|\phi\rangle\,;\ \boldsymbol{\phi}(\vec{x})|\phi\rangle = \phi(\vec{x})|\phi\rangle\}$ で与えられるから，任意の演算子 $\mathcal{O}$ のトレースは

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{O} = \int \mathcal{D}\phi(\vec{x})\,\langle\phi|\,\mathcal{O}\,|\phi\rangle \tag{40}$$

と書けることに注意する。さらに，虚時間 Heisenberg 演算子 (37) の固有状態

$$\boldsymbol{\phi}(\vec{x}, -i\tau)|\phi, -i\tau\rangle = \phi(\vec{x})|\phi, -i\tau\rangle, \qquad |\phi, -i\tau\rangle = e^{-\tau \boldsymbol{H}}|\phi\rangle \tag{41}$$

に注意すれば，(39) の生成汎関数 $Z_\beta[J]$ に対する次の表式を得る：

$$Z_\beta[J] = \int \mathcal{D}\phi(\vec{x})\langle\phi, -i\beta|\,\mathrm{T}_\tau \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\, J(\vec{x}, -i\tau)\boldsymbol{\phi}(\vec{x}, -i\tau)\right]|\phi, 0\rangle. \tag{42}$$

この表式は，虚時刻 $t=0$ で初期状態 $|\phi, 0\rangle$ から出発して，外場 $J(\vec{x}, -i\tau)$ の存在の下で“時間”発展した後，虚時刻 $t=-i\beta$ に初めと同じ ϕ の終状態 $|\phi, -i\beta\rangle$ にある確率振幅と解釈でき，通常の実時間発展の場合の生成汎関数 (16) と同じ形をしている。それゆえ，前と同様に，虚時間間隔 $[0, -i\beta]$ を N 等分し，各虚時刻での (41) の固有状態の完全系 $\int\mathcal{D}\phi(\vec{x}, -i\tau)|\phi, -i\tau\rangle\langle\phi, -i\tau|=1$ を次々とはさみ，$N\to\infty$ の極限をとるという手続きを行えば，(42) に対する次の経路積分表式が得られる：

$$Z_\beta[J]=\int_{\phi,\pi:\text{周期的}}\mathcal{D}\pi\,\mathcal{D}\phi\,\exp\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left[i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau}-\mathcal{H}(\pi,\phi)+J\phi\right] \tag{43}$$

ここで経路積分は $\phi(\vec{x}, 0)=\phi(\vec{x}, -i\beta)$, $\pi(\vec{x}, 0)=\pi(\vec{x}, -i\beta)$ の周期的境界条件を満たす4次元関数 $\phi(\vec{x}, -i\tau)$, $\pi(\vec{x}, -i\tau)$ にわたる積分である。ϕ の周期性の要求は，もともと (40) のトレース表式でブラ $\langle\phi|$ とケット $|\phi\rangle$ が同じ $\phi(\vec{x})$ であることからきており，π の周期性の要求も，初めにトレースを $\boldsymbol{\pi}(\vec{x})$ の固有状態 $|\pi\rangle$ を用いて $\mathrm{tr}\,\mathcal{O}=\int\mathcal{D}\pi(\vec{x})\langle\pi|\,\mathcal{O}\,|\pi\rangle$ から出発してもよかったことから明らかであろう。この周期性の要求により，ϕ, π の Fourier 変換は，虚時間 τ 方向については Fourier 級数となる：

$$\begin{aligned}\phi_n(\vec{k})&=\int_0^\beta d\tau\int d^3x\;e^{-i\omega_n\tau}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\phi(\vec{x}, -i\tau),\\ \phi(\vec{x}, -i\tau)&=\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\omega_n\tau}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\phi_n(\vec{k}).\end{aligned}\quad\left(\omega_n\equiv\frac{2\pi n}{\beta}\right) \tag{44}$$

前と同じく，(43) で π に関する Gauss 積分を遂行すれば

$$\begin{aligned}Z_\beta[J]=N(\beta)\int_{\phi:\text{周期的}}\mathcal{D}\phi\,\exp\Big[-\int_0^\beta d\tau\int d^3x\,\Big\{&\frac{1}{2}[\dot{\phi}^2+(\vec{\nabla}\phi)^2+\mu^2\phi^2]\\ &-\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)-J\phi\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{45}$$

が得られる。$\dot{\phi}\equiv\partial\phi/\partial\tau$．ただ，この場合 π 積分は β に依存する規格化因子 $N(\beta)$ を出すことに注意しておこう：

$$\begin{aligned}N(\beta)&=\int\mathcal{D}\pi\,\exp\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left[-\frac{1}{2}(\pi-i\dot{\phi})^2\right]\\ &=\int\mathcal{D}\pi'\,\exp\int_0^1 d\tau'\int d^3x\left[-\frac{1}{2}\beta\pi'^2\right]\qquad(\pi'\equiv\pi-i\dot{\phi},\ \tau'\equiv\tau/\beta)\\ &=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ln\beta\right].\end{aligned} \tag{46}$$

(45) が，分配関数，松原 Green 関数の生成汎関数 $Z_\beta[J]$ に対する望みの経路積分表式で，指数部が Euclid 化された Lagrangian の区間 $[0, \beta]$ にわた

る $d\tau$ 積分で与えられている点に注意したい。(45) に基づいて，次節に述べる経路積分の摂動論的評価法を適用すれば，有限温度系の場合の Feynman 則，すなわち系統的摂動論を得ることができる(演習問題 4.4)。

4-3 摂動論

前節 (18) の公式で，(1) の Lagrangian 密度をあらわに書けば

$$Z[J]=N\int\mathcal{D}\phi\,\Psi_0^*\Psi_0\exp i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\phi(\Box+\mu^2)\phi+\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)+J\phi\right]. \qquad (1)$$

前節の注意に従って，以後，μ^2 を $\mu^2-i\epsilon$ のことだと理解し，$\Psi_0^*\Psi_0$ を省略する。これから，この (1) に基づき摂動展開の Feynman 則を導く。

まず，相互作用項 $\mathcal{L}_{\rm int}$ が 0 の自由場の場合を考えよう。

$$Z_0[J]=N\int\mathcal{D}\phi\exp i\left[-\frac{1}{2}\phi\cdot(\Box+\mu^2)\phi+J\cdot\phi\right] \qquad (2)$$

ただし二つの関数 $\phi(x), \psi(x)$ の内積 $\phi\cdot\psi$ は

$$\phi\cdot\psi\equiv\int d^4x\,\phi(x)\,\psi(x) \qquad (3)$$

で定義するものとする。関数 $\phi(x)$ を (連続) 添字 x を持つベクトル，関数にかかる演算子を行列 $M(x,y)$，とみなすことができるので

$$(M\phi)(x)\equiv\int d^4y\,M(x,y)\phi(y) \qquad (4)$$

の記号を使う。Klein-Gordon 演算子はこの意味では

$$(\Box+\mu^2)(x,y)=(\Box_x+\mu^2)\,\delta^4(x-y) \qquad (5)$$

なる行列である。$i(\Box+\mu^2)$ の逆行列 $\Delta_F(x,y)=\Delta_F(x-y)$ を

$$i(\Box_x+\mu^2)\Delta_F(x-y)=\delta^4(x-y) \qquad (6)$$

で定義すれば，(2) の被積分汎関数は

$$\exp i\left[-\frac{1}{2}(\phi-i\Delta_F J)\cdot(\Box+\mu^2)(\phi-i\Delta_F J)+i\frac{1}{2}J\cdot\Delta_F J\right] \qquad (7)$$

と書き直せるから，$\phi\ \to\ \phi'=\phi-i\Delta_F J$ の変数変換をし，$\mathcal{D}\phi=\mathcal{D}\phi'$ を用いれば，

$$\begin{aligned}Z_0[J]&=e^{\frac{1}{2}iJ\cdot\Delta_F iJ}\cdot N\int\mathcal{D}\phi'\exp i\left[-\frac{1}{2}\phi'\cdot(\Box+\mu^2)\phi'\right]\\&=\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\;iJ(x)\Delta_F(x-y)iJ(y)\right]\times Z_0[J=0]\end{aligned} \qquad (8)$$

を得る。これで $Z_0[J]$ の J-依存性が完全に求まった点が重要である。

(6) は，Fourier 変換を使うと簡単に解くことができ，

$$\Delta_F(x-y)=\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{1}{\mu^2-k^2-i\epsilon}e^{-ik(x-y)} \tag{9}$$

と求まる。ここで，$-i\epsilon$ 処法，$\mu^2\to\mu^2-i\epsilon$，を使った。これは，まさに **2-1** の (32) で求めた自由スカラー場の Feynman 伝播関数 $\Delta_F(x-y)\equiv\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ に一致している。上の経路積分の計算では一切，真空 $|0\rangle$ の波動汎関数の情報を使っていないのに，$|0\rangle$ の性質をあらわに使った **2-1** の (32) と一致した答を与えるのは，前節で $-i\epsilon$ 処法に関して説明した理由によるのである。

次に相互作用項 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ のある場合の最初の (1) を評価する。まず，

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}e^{iJ\cdot\phi}=\phi(x)e^{iJ\cdot\phi} \tag{10}$$

であるから，$e^{iJ\cdot\phi}$ の前では任意の汎関数 $F[\phi]$ を $F[\delta/i\delta J]$ に置き換えられることに注意する。これを使えば (1) は

$$Z[J]=\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{\text{int}}(\delta/i\delta J(x))\right]$$
$$\times N\int\mathcal{D}\phi\exp i\left[-\frac{1}{2}\phi\cdot(\Box+\mu^2)\phi+J\cdot\phi\right] \tag{11}$$

と書き直せる。さらに，この積分部分は先ほどの (2) の $Z_0[J]$ であるから，(8) の表式を用いて，

$$Z[J]=N'\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{\text{int}}(\delta/i\delta J(x))\right]\exp\left[\frac{1}{2}iJ\cdot\Delta_F iJ\right] \tag{12}$$

となる。N' は J によらない定数因子である。

(12) からも摂動展開の公式が出せるが，これを

$$Z[J]=N'\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta_F\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)+iJ\cdot\phi\right]\Bigg|_{\phi=0} \tag{13}$$

の形に直した方がもっとわかりやすい。(13) が (12) に等しい理由は，一般の汎関数 F, G に対し

$$\begin{aligned}F[\delta/\delta\phi]G[\phi]e^{iJ\cdot\phi}&=F[\delta/\delta\phi]G[\delta/i\delta J]e^{iJ\cdot\phi}\\&=G[\delta/i\delta J]F[\delta/\delta\phi]e^{iJ\cdot\phi}\\&=G[\delta/i\delta J]F[iJ]e^{iJ\cdot\phi}\end{aligned} \tag{14}$$

であるから，両辺で $\phi=0$ と置けば

$$F[\delta/\delta\phi]G[\phi]e^{iJ\cdot\phi}|_{\phi=0}=G[\delta/i\delta J]F[iJ] \tag{15}$$

の公式が成り立つことがわかるからである。

さて，得られた公式(13)が $Z[J]$ に対する摂動展開の基礎を与える。(13)の「微分演算 $\exp[(1/2)(\delta/\delta\phi)\cdot\Delta_F(\delta/\delta\phi)]$ をして最後に $\phi=0$ とおく」操作を

$$\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta_F\frac{\delta}{\delta\phi}\right]F[\phi]\Big|_{\phi=0}\equiv\langle F[\phi]\rangle_0 \tag{16}$$

の記号で表すことにする†。そうすれば(13)は，

$$Z[J]=\frac{\left\langle\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)+iJ\cdot\phi\right]\right\rangle_0}{\left\langle\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)\right]\right\rangle_0} \tag{17}$$

となる。ただし N' は $Z[J=0]=1$ となるように決められることを使った。相互作用項 $\mathcal{L}_{\rm int}$ が小さいとして展開すれば，摂動展開の公式

$$Z[J]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int d^4y_1\cdots d^4y_m\langle i\mathcal{L}_{\rm int}(y_1)\cdots i\mathcal{L}_{\rm int}(y_m)e^{iJ\cdot\phi}\rangle_0/(\text{分母}) \tag{18}$$

になる。(分母)は(17)の分母と同じで，その効果については後に述べる。

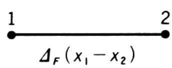
(18)を具体的に評価するには，まず(16)で定義された演算 $\langle\cdots\rangle_0$ の働きを理解せねばならない。2個の ϕ の積にかかる場合は明らかに

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_0=\Delta_F(x_1-x_2)\equiv\overbracket{\phi(x_1)\phi(x_2)} \tag{19}$$

となる。この $\phi(x_1),\phi(x_2)$ の組を Feynman 伝播関数 $\Delta_F(x_1-x_2)$ に置き換える操作を縮約(contraction)と呼ぶ。この縮約操作を，式の上では(19)にすでに書いたように $\phi(x_1),\phi(x_2)$ の上に ⌐¬ をつけて表し，図では4·3図のように点 x_1 と点 x_2 をつなぐ線で表すことにする。すると，四つの ϕ の積の場合は，($\phi(x_i)\equiv\phi^i$，$\Delta_F(x_i-x_j)\equiv\Delta_F^{ij}$ のような略記を用いて)

$$\begin{aligned}\langle\phi^1\phi^2\phi^3\phi^4\rangle_0&=\overbracket{\phi^1\phi^2}\,\overbracket{\phi^3\phi^4}+\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4+\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\\&=\Delta_F^{12}\Delta_F^{34}+\Delta_F^{13}\Delta_F^{24}+\Delta_F^{14}\Delta_F^{23},\end{aligned} \tag{20}$$

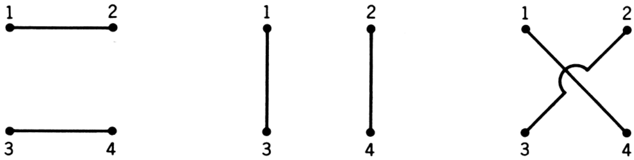
図では4·4図となることが，実際(16)の演算をやれば，すぐわかる。4·3図や4·4図は相互作用がないときの最も簡単なFeynmanグラフ(graphまたはdiagram)の例である。一般に，(16)の演算が $2n$ 個の ϕ の積にかかる場合は††，$2n$



4·3 図

† (16)の演算で定義される量 $\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0$ というのは，演算子型式の言葉で言うと，$(\Box+\mu^2)\boldsymbol{\phi}_{\rm I}(x)=0$ を満たす自由場の演算子 $\boldsymbol{\phi}_{\rm I}(x)$ とその真空 $|0_{\rm I}\rangle$ を用いて $\langle 0_{\rm I}|T\boldsymbol{\phi}_{\rm I}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}_{\rm I}(x_n)|0_{\rm I}\rangle$ と表される量のことである。したがって(17)は，演算子型式で **Gell-Mann (ゲルマン)-Low (ロウ) の関係式**と呼ばれている公式に対応している。

†† 〈奇数個の ϕ の積〉$_0$ は，最後に ϕ が1個余り $\phi=0$ とおくので0となる。



4·4 図

個の $\phi^1 \sim \phi^{2n}$ の中から，二つずつを n 対縮約して得られる Δ_F の積を，あらゆる可能な n 対のつくり方にわたって足し上げることにより得られる：

$$\langle\phi^1\phi^2\cdots\phi^{2n}\rangle_0=\sum_{\text{組合せ}}\Delta_F^{i_1j_1}\Delta_F^{i_2j_2}\cdots\Delta_F^{i_nj_n}. \tag{21}$$

ここで重要な点は，あらゆる n 対の作り方の一つ一つが，**1 の重み**で (21) に効いている，ということである (演習問題 4.5)。この事実が以下で一般の Feynman グラフの重み (係数) を計算するための基礎となる。

さて，$\langle\cdots\rangle_0$ の演算の意味が明らかになったので，(18) に戻ろう。$\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ も ϕ の多項式であるから，(18) も (20) や (21) と同様に評価できるが，ただ，$\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ の中の ϕ は皆同一点上の場であるという点だけが特殊である。一般的ルールを習得するには具体例を考えるのが一番で，簡単のため，

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)=-\frac{g}{3!}\phi^3(x) \tag{22}$$

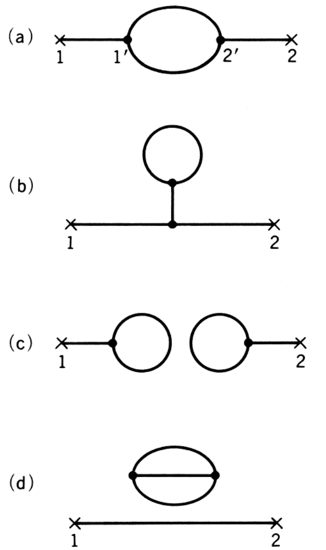
の ϕ^3 相互作用の場合を例にとり，(18) の分子の外場 J について 2 次の項を考えてみよう†：

$$\frac{1}{2!}\int dx_1\,dx_2\; iJ(x_1)iJ(x_2)$$
$$\times\left\{\sum_m\frac{1}{m!}\int dy_1\cdots dy_m\left\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\frac{-ig}{3!}\phi^3(y_1)\cdots\frac{-ig}{3!}\phi^3(y_m)\right\rangle_0\right\}. \tag{23}$$

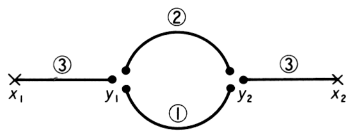
括弧 { } でくくった部分が 2 点 Green 関数 $G^{(2)}(x_1x_2)$ に対応する。

まず，摂動の 0 次 ($m=0$) では，$G^{(2)}$ は $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_0=\Delta_F(x_1-x_2)$ でグラフは 4·3 図で与えられる。1 次 ($m=1$) の項は ϕ の奇数べきだから 0 となる。摂動の 2 次の項は $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^3(y_1)\phi^3(y_2)$ の 8 個の ϕ のあらゆる縮約のとり方を考えて 4·5 図(a)～(d)に示した 4 種のグラフを得る††。これらのグラフでは (22) の ϕ^3 相互作用項は 3 本の線の会する点に対応し，その

† 明白な場合，簡単のため，d^4x を単に dx と記す。
†† 実は 4·5 図(a)～(d) 以外にもう一種グラフがある。どのグラフか考えられたい。



4·5 図



4·6 図 統計因子の数え方例

点を(3点)頂点(vertex)と呼ぶ。このときどのようなグラフが出るかはすぐわかるが，それぞれのグラフがどういう重み(係数)で出るかという点がわりあい面倒である。

例として4·5図(a)のグラフの重みを計算してみよう。まず，図中の2箇所の頂点1′, 2′のどちらを(23)の$\mathcal{L}_{\rm int}(y_1)$と$\mathcal{L}_{\rm int}(y_2)$のどちらにとるかで2通りあり，$1/m!=1/2$を相殺する。[(18)の摂動の$m$次項に現れる$1/m!$の因子は，ある一つのグラフを考えると，その$m$個の頂点(が互いに区別できる限り)のどれを$m$個の$\mathcal{L}_{\rm int}$項のどれにとるかで$m!$通りあるので，一般に相殺する。] 1′に例えば$\mathcal{L}_{\rm int}(y_1)$を使うと決めても，次に$\mathcal{L}_{\rm int}(y_1)$の中には三つの$\phi(y_1)$が入っているので，$\phi(x_1)$と縮約する相棒の$\phi(y_1)$を選ぶのに3通り，それにもう一方の$\phi(x_2)$と縮約する$\phi(y_2)$を選ぶのに3通り，さらに残る$\phi^2(y_1)$と$\phi^2(y_2)$の間で縮約する仕方が2通りある(4·6図参照)。したがって

[4·5図(a)]

$$=\frac{3\cdot3\cdot2}{(3!)^2}\int dy_1dy_2\,\Delta_F(x_1-y_1)(-ig)[\Delta_F(y_1-y_2)]^2(-ig)\Delta_F(y_2-x_2) \quad (24)$$

が(23)の{ }の中の量への4·5図(a)の寄与となる。同様に

[4·5図(b)]

$$=\frac{3\cdot2\cdot3}{(3!)^2}\int dydz\,\Delta_F(x_1-y)(-ig)\Delta_F(y-x_2)\Delta_F(y-z)(-ig)\Delta_F(z-z), \quad (25)$$

$$[4\cdot5\text{図}(\mathrm{c})]=G_1^{(1)}(x_1)G_1^{(1)}(x_2), \quad (26)$$

$$[4\cdot5\text{図}(\mathrm{d})]=G_0^{(2)}(x_1x_2)\frac{1}{2}\left(\frac{3!}{(3!)^2}\right)\int dydz\,(-ig)[\Delta_F(y-z)]^3(-ig), \quad (27)$$

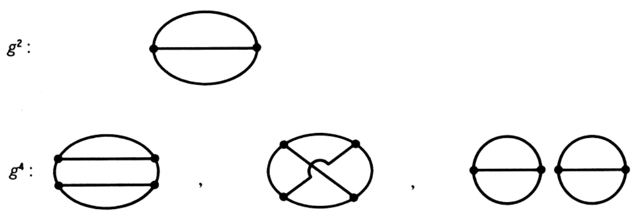
$$G_1^{(1)}(x)=\left(\frac{3}{3!}\right)\int dy\ \Delta_F(x-y)(-ig)\Delta_F(y-y),$$
$$G_0^{(2)}(xy)\equiv\Delta_F(x-y). \tag{28}$$

ここで，$G_m^{(n)}$ は n 点 Green 関数の摂動の m 次の量の意味である。(22) の $\mathcal{L}_{\rm int}$ の中の重みの因子 1/3! はもともと“普通”の場合に相殺するようつけてある。例えば $G^{(3)}$ の摂動の 1 次の量では，

$$G_1^{(3)}(x_1x_2x_3)=\int dy\ \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)(-ig/3!)\phi^3(y)\rangle_0$$
$$=\int dy\ (-ig)\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y) \tag{29}$$

となって消えている。すなわち“普通”は $\phi^3(y)$ の三つの ϕ と縮約する相棒の三つの ϕ [(29) の例では $\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3)$] は互いに区別できるので，相棒の選び方が 3! 通りあり相殺する。ところが，4·5 図の (a)～(d) では，どれも完全には 3! 因子が消され切っていない。これは，これらに互いに区別できない ϕ (頂点から出る線) があるためである。そのため，(24)，(25) では 1/2 の重み因子が残る。4·5 図 (d) の寄与 (27) では，ループを作っている 3 本の線が区別できないため 1/3! の因子が残るが，それ以外に $1/m!=1/2$ の因子も残っている。これは 4·5 図 (d) の二つの頂点が区別できないためである。このような重みの因子を統計因子と呼び，これを速く正確に計算するには経験を積む以外にない。

真空泡グラフと連結 Green 関数　n 点 Green 関数 $G^{(n)}(x_1\cdots x_n)$ に寄与するグラフにおいて，点 $x_1, \cdots, x_n$ は 4·5 図の点 1, 2 のように端点となる。端点に直接つながる線を外線 (external line) それ以外を内線 (internal line) と呼ぶ。$Z[J]$ の計算では，端点 x には外場 $J(x)$ (の i 倍) がかかっている。$Z[J]$ に効くグラフの中には，4·5 図 (d) のように，外場 J につながっている部分と全く独立な部分とに分離しているものがある。外場 J と全くつながっていない部分のグラフ自体は，真空泡 (vacuum bubble) グラフと呼ばれ，4·7 図に示されるようなものがある。真空泡グラフの寄与を全部



4·7 図　真空泡グラフの例

足し上げ(1を加え)たものを $\mathcal{B}$ と呼び，一方4·5図(a)～(c)のように必ずどこかで外場 J につながっているグラフだけで，真空泡グラフをどこにも含まないグラフの寄与の総和(に1を加えたもの)を $\mathcal{C}$ と呼ぶことにする†。そうすれば(17)の分子の量に対するすべてのグラフの総和は $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ でその重みまで正しく与えられる。例えば，摂動の m 次の寄与を $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_m$ と呼べば，4·5図(d)の寄与は，ちょうど，$\mathcal{B}_2\times\mathcal{C}_0$(に含まれる項)に一致している。他方真空泡グラフの総和 $\mathcal{B}$ というのはちょうど(17)の分母の量そのものであることに気付くから，(17)または(18)の $Z[J]$ は

$$Z[J]=(\mathcal{B}\times\mathcal{C})/\mathcal{B}=\mathcal{C}=(\text{真空泡を含まないグラフの総和}) \qquad (30)$$

であることがわかる。すなわち(17)の分母の存在は効果としてすべての真空泡グラフを0にすることに等しい。

(30)の $\mathcal{C}$ に寄与するグラフは必ず外場 J につながっているが，すべてが一つに連結しているわけではない。たとえば $\mathcal{C}$ に寄与する4·5図(c)は二つの連結部分から成っている。4·4図も非連結である。そこで，全体が一つに連結しているグラフ(connected graph)のみの寄与の総和を C と呼ぶと，二つの連結成分から成るグラフの寄与の総和は $C^2/2$, 三つの連結成分から成るグラフは $C^3/3!$, …となるから，(30)に寄与する全グラフの和は

$$Z[J]=\mathcal{C}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}C^l=e^C \qquad (31)$$

となる。

この議論より，新たに生成汎関数 $W[J]$ を

$$Z[J]=e^{iW[J]} \qquad (32)$$

で定義すれば，

$$iW[J]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\,J(x_1)\cdots J(x_n)G_{\text{conn}}^{(n)}(x_1\cdots x_n) \quad (33)$$

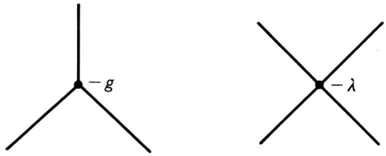
で生成される Green 関数 $G_{\text{conn}}^{(n)}$ は，端点 x_1～x_n がすべて伝播関数と頂点で一つに連結されたグラフのみの寄与から成ることがわかり，連結 Green 関数と呼ばれる。

Feynman 則 上の4·5図に対する(24)～(27)の計算や真空泡グラフに対する注意から，我々は，n 点 Green 関数 $G^{(n)}(x_1\cdots x_n)$ を計算するための次のような一般的規則を見出す。

---

† $\mathcal{B}$ や $\mathcal{C}$ に1を加えることは，空グラフ(empty graph)をグラフの一つとしてその寄与を加えているとみなすことができる。

（0） まず，与えられた n 個の点 $x_1, \cdots, x_n$ と，（摂動の m 次で）m 個の $\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ に相当する頂点とをあらゆる可能な仕方で結ぶグラフ——Feynman グラフ——をすべて描く。各頂点からは，(22) の ϕ^3 相互作用なら 3 本の線が，ϕ^4 相互作用



4・8 図

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{34}$$

なら 4 本の線が出るものとする (4・8 図)。真空泡グラフは除く。

次に得られた各 Feynman グラフに対して

（i） 端点や頂点の間を結ぶ各線に Feynman 伝播関数を対応させる。すなわち x と y をつなぐ線には $\Delta_F(x-y)$ を付与する。

（ii） 各頂点には $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ の結合定数因子を付与する；すなわち，ϕ^3 頂点には $-ig$，ϕ^4 頂点には $-i\lambda$. (35)

（iii） 各頂点の位置 y_i について積分 d^4y_i をする。

（iv） そのグラフの統計因子を計算して掛ける。

の規則で，その寄与が計算できる。

以上が，x-空間での Feynman 則 (Feynman rule) であるが，実際の計算は，Fourier 変換して p-空間で行う方が便利なので，p-空間での Feynman 則に直しておこう。そのため，上の x-表示の Green 関数 $G^{(n)}(x_1 \cdots x_n)$ を Fourier 変換し，運動量保存を考慮して得られる，次の運動量表示 Green 関数 $\tilde{G}^{(n)}$ を定義する：

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_n \, e^{ip_1x_1+\cdots+ip_nx_n} G^{(n)}(x_1 \cdots x_n) \equiv \tilde{G}^{(n)}(p_1 \cdots p_n) i(2\pi)^4 \delta^4(p_1+\cdots+p_n). \tag{36}$$

上の $G^{(n)}(x_1 \cdots x_n)$ に対する計算規則 (35) を $\tilde{G}^{(n)}(p_1 \cdots p_n)$ に対する規則に読み直そう。各 Feynman 伝播関数 Δ_F に対し (9) を代入すれば，すべての端点座標 $x_1, \cdots, x_n$ と頂点座標 $y_1, \cdots, y_m$ への依存性があらわになり，(36) の d^4x_i 積分と (iii) の d^4y_i 積分とが遂行できる。d^4x_i 積分は，外線伝播関数の運動量 k_i と外から指定した ($\tilde{G}^{(n)}$ の引数) p_i が等しいという因子

$(2\pi)^4\delta^4(k_i-p_i)$ を出す。d^4y_i 積分は各頂点に流れ込む運動量が保存するという因子 $(2\pi)^4\delta^4(\sum k_a)$ を生ずる。したがって，まず暫定的に (36) の $\widetilde{G}^{(n)}$ の計算規則として，

(i)′　各線に，積分記号 $\displaystyle\int\frac{d^4k_i}{i(2\pi)^4}$ と因子 $1/(\mu^2-k_i^2-i\epsilon)$ とを付与する。

(ii)′　各端点に $(2\pi)^4\delta(p_i-k_i)$ を付与する。ただし p_i は $\widetilde{G}^{(n)}$ の引数。　　(37)

(iii)′　各頂点に，$-ig$（または $-i\lambda$）$\times(2\pi)^4\delta(\sum k_a)$ を付与する。

を得る。上の (0) と (iv) は変更なし。

しかし，(i)′ の積分 $\int d^4k_i/i(2\pi)^4$ のうち，外線に付随するものは (ii)′ の δ 関数ですぐに遂行でき，また，(iii)′ の δ 関数を使うと「頂点の個数 -1」個の内線に付随した積分が遂行できる。ここで1個減っているのは，(iii)′ の δ 関数全体の中に，全外線運動量の保存則の因子 $i(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)$ が一つ入っていて，それは内線運動量と無関係となるからである。残った内線運動量積分というのは，各頂点における運動量保存を考慮した後も任意に残る運動量で，それはグラフの中のループを回る運動量に他ならない。したがって，次の最終的な Feynman 規則を得る：

(36) で定義された $\widetilde{G}^{(n)}(p_1\cdots p_n)$ を得るには，

(i)　運動量 p_i の外線には $\displaystyle\frac{1}{i}\frac{1}{\mu^2-p_i^2-i\epsilon}$ を付与する。

(ii)　運動量 k の内線には $\displaystyle\frac{1}{\mu^2-k^2-i\epsilon}$ を付与する。

(iii)　各頂点には $\mathcal{L}_{\rm int}$ の結合定数因子，すなわち，ϕ^3 頂点には $-g$，ϕ^4 頂点には $-\lambda$，を付与する (4・8 図)。　　(38)

(iv)　各頂点での運動量保存はあらかじめ考慮に入れて内線の運動量を決める。決まらないループ運動量 l については積分 $\displaystyle\int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}$ を行う。

(v)　統計因子を計算してかける。

上で述べた Feynman グラフを描く規則 (0) は，運動量表示でも同一である。

ついでながら，上の説明により，任意のグラフに対して，その中の内線

伝播関数の数 P と頂点の数 V とループの数 L との間には

$$P-(V-1)=L \tag{39}$$

の関係が一般に成立することがいえている，ということに注意しておこう。

T 積と T* 積　最後に，経路積分に基づいて計算される Green 関数は，明白に Lorentz 共変であって，一般には共変性を持たない T 積の Green 関数とは異なるという事実に注意しておきたい。ここまで議論してきたような場の微分を含まない Green 関数 $G^{(n)}(x_1\cdots x_n)=\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)|0\rangle$ の場合は共変で全く問題がない。しかし場の微分を含む，例えば，

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x)\,\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(y)|0\rangle\\ &\equiv\theta(x_0-y_0)\langle 0|\partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x)\,\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(y)|0\rangle+\theta(y_0-x_0)\langle 0|\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(y)\,\partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x)|0\rangle\end{aligned} \tag{40}$$

のような T 積 Green 関数を考えてみよう。この Green 関数は Lorentz 共変でない。なぜなら，$\boldsymbol{\phi}$ の同時刻交換関係 2-1 (4) を用いて

$$\begin{aligned}\partial_\mu^x\,\partial_\nu^y\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(y)|0\rangle&=\partial_\mu^x\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x)\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(y)|0\rangle\\ &=\langle 0|\mathrm{T}\partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x)\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(y)|0\rangle+i\delta_\mu^0\,\delta_\nu^0\,\delta^4(x-y)\end{aligned} \tag{41}$$

が従い，左辺は共変性が明らかな $-\partial_\mu^x\partial_\nu^x\Delta_F(x-y)$ であるのに対し，右辺の同時刻交換関係からきた c 数項 $i\delta_\mu^0\delta_\nu^0\delta^4(x-y)$ は共変な量でないからである。

一方，経路積分で (40) の Green 関数に対応すると思われる量は

$$\frac{\displaystyle\int\mathcal{D}\phi\;\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\exp\left(i\int dx\,\mathcal{L}\right)}{\displaystyle\int\mathcal{D}\phi\exp\left(i\int dx\,\mathcal{L}\right)}\equiv\langle\partial_\mu\phi(x)\,\partial_\nu\phi(y)\rangle \tag{42}$$

である。これは，微分の定義 $\partial_\rho\phi(x)=\lim_{\epsilon\to 0}[\phi(x^\mu+\delta_\rho^\mu\epsilon)-\phi(x)]/\epsilon$ から明らかなように，微分演算 ∂_μ^x, ∂_ν^y は，経路積分 $\int\mathcal{D}\phi$ の外側から行うのと同じで，

$$\langle\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(y)\rangle=\partial_\mu^x\,\partial_\nu^y\langle\phi(x)\phi(y)\rangle=\partial_\mu^x\,\partial_\nu^y\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(y)|0\rangle$$

を与える。すなわち，経路積分 (42) で計算されるものは Lorentz 共変な (41) の左辺の量になる。これは一般的な事情であって，新たに T* 積 (T*-product) なる概念を，一般に，積の内部の場に掛かる微分演算をすべて T 積の**外側から**行うものとして，

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}^*[\partial_\mu\boldsymbol{O}_1(x_1)\boldsymbol{O}_2(x_2)\cdots\boldsymbol{O}_n(x_n)]\\ &\qquad\equiv\partial_\mu^{x_1}\mathrm{T}^*[\boldsymbol{O}_1(x_1)\boldsymbol{O}_2(x_2)\cdots\boldsymbol{O}_n(x_n)],\qquad(\forall\,\boldsymbol{O}_i\ \text{に対し})\\ &\mathrm{T}^*[\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)]\equiv\mathrm{T}[\boldsymbol{\phi}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}(x_n)],\end{aligned} \tag{43}$$

の定義で導入すれば，明らかに，**経路積分表式の与える一般の Green 関数**

は，T* 積の Green 関数であるということができる；すなわち，任意階の微分を含む任意の演算子 $\boldsymbol{O}_i(x)=\partial_\mu\cdots\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(x)$ に対し，

$$\langle 0|\mathrm{T}^*\boldsymbol{O}_1(x_1)\cdots\boldsymbol{O}_n(x_n)|0\rangle$$
$$=\frac{\int\mathcal{D}\phi\, O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\exp\left(i\int dx\,\mathcal{L}\right)}{\int\mathcal{D}\phi\exp\left(i\int dx\,\mathcal{L}\right)}\equiv\langle O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\rangle \qquad (44)$$

が成り立つ。この T* 積の Green 関数は，定義より明らかに，Lorentz 共変な量である。経路積分に基づいて導いた我々の Feynman 則により計算される Green 関数も，たとえ相互作用項 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ に場の微分が現れるいわゆる微分結合の理論においても，摂動展開の任意のステップで明白な共変性を保ち，T* 積の Green 関数を与えるのである。この教科書では，演算子型式の議論の二，三の場合を除いて，もっぱらこの Lorentz 共変な T* 積のみを議論するので，以後，単に T 積といえば T* 積を意味するものとし，記号も区別しない。(特に区別を要する場合はその都度注意する。)

4-4 フェルミオン場の経路積分

前節までもっぱらスカラー場を扱ってきたが，Bose 統計に従う場ならベクトル場でもテンソル場でも本質的に同じである。ところが Fermi 統計に従う場の場合はかなり事情が異なる。この節ではフェルミオン場として Dirac 場の扱いを述べるが，Majorana 場でも Rarita-Schwinger 場でも本質的には変わらない。

Dirac 場 $\boldsymbol{\psi}(\vec{x},t)$ は[†] 2-2 の (4), (5) で与えた正準反交換関係

$$\{\boldsymbol{\psi}_\alpha(\vec{x},t),\boldsymbol{\psi}^{*\beta}(\vec{y},t)\}=\delta_\alpha^\beta\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \qquad (1)$$

$$\{\boldsymbol{\psi}_\alpha(\vec{x},t),\boldsymbol{\psi}_\beta(\vec{y},t)\}=\{\boldsymbol{\psi}^{*\alpha}(\vec{x},t),\boldsymbol{\psi}^{*\beta}(\vec{y},t)\}=0 \qquad (2)$$

を満たす。経路積分を導く基礎となる $\boldsymbol{\psi}_\alpha(\vec{x})=\boldsymbol{\psi}_\alpha(\vec{x},t=0)$ の固有状態

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\vec{x})|\psi\rangle=\psi_\alpha(\vec{x})|\psi\rangle \qquad (3)$$

の固有値 $\psi_\alpha(\vec{x})$ は，(2) が示すように演算子 $\boldsymbol{\psi}_\alpha(\vec{x})$ どうしが**反可換**であるので，ふつうの複素数だと (3) 自身と矛盾する。これを矛盾なく扱うには，“c 数” 固有値 $\psi_\alpha(\vec{x})$ を，1-5 で少し触れたように，お互いの間で(および演算子 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^*$ とも) **反可換**な Grassmann 数と考えなければならない：

† この節でも演算子は太字 $\boldsymbol{\psi}$ で，対応する固有値は普通の ψ で，表す。

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta(\vec{y})\} = \{\psi_\alpha(\vec{x}), \boldsymbol{\psi}_\beta(\vec{y})\} = \{\psi_\alpha(\vec{x}), \boldsymbol{\psi}^{*\beta}(\vec{y})\} = 0. \tag{4}$$

すなわち，フェルミオン場というのは物理的には対応する古典的な場が存在しないのだが，強いて“古典的対応物”を考えれば“Grassmann 数値をとる場”(Grassmann valued field) ということになるのである。(我々はすでに **1-5, 2-2** でこの立場をとってきた。)

Grassmann 数の積分　2-2 の (3) で我々は Grassmann 数についての微分を定義したが，ここでは Grassmann 数について (定) 積分するという概念が必要になる。そこでまず，Grassmann 数が一変数 ξ しか存在しない場合から考察を始めよう。

Grassmann 数 ξ は自分とも反可換だから $\xi^2=0$. それゆえ ξ の任意の関数 $f(\xi)$ は ξ に関する展開が 1 次で終わる：

$$f(\xi) = f_0 + f_1\xi. \tag{5}$$

ξ についての積分を定義するにあたって，通常の (定) 積分の満たす次の 2 性質がこの場合も成り立つことを要請しよう：

i）　線形性：

$$\int d\xi\,[af(\xi)+bg(\xi)] = a\int d\xi\, f(\xi) + b\int d\xi\, g(\xi), \quad (a, b \in \boldsymbol{C}) \tag{6}$$

ii）　部分積分可能性：

$$\int d\xi \left[\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi)\right] = 0. \tag{7}$$

そうすれば，(7) の $f(\xi)$ に (5) を代入し (6) の線形性を使うと

$$0 = \int d\xi\, \frac{\partial}{\partial\xi}(f_0 + f_1\xi) = f_1\int d\xi\, 1 \longrightarrow \int d\xi\, 1 = 0$$

が従い，これと (6) より $\int d\xi\, \xi=$定数 が出る。この定数を 1 にする規約をとって，結局，Grassmann 1 変数の (定) 積分は

$$\int d\xi\, \xi = 1, \qquad \int d\xi\, 1 = 0 \tag{8}$$

および (6) の線形性で一意的に定義される。(8) の結果は実は**積分** $\int d\xi$ **は微分** $\partial/\partial\xi$ **と同じ**だということを示している。

a を普通の数として，変数変換 $\xi' = a\xi$ を考えよう。Jacobian (ヤコビアン) を J として $d\xi = J\, d\xi'$ とすると

$$\int d\xi\, a\xi = \int J\, d\xi'\, \xi'$$

が成立せねばならないから，$J=a$ と求まる。すなわち

$$d\xi = a\, d(a\xi) \tag{9}$$

である。これは通常の積分測度の変換と比べて Jacobian が逆数で出ていて，むしろ再び微分演算子 $\partial/\partial\xi$ の変換則と思えば普通である。

次に N 個の Grassmann 変数 $\xi_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ がある場合を考えよう。この場合の積分も，(8) にならって

$$\int d\xi_i\, \xi_i=1, \qquad \int d\xi_i\, 1=0 \tag{10}$$

で定義する。さらに，積分記号 $d\xi_i$ どうしや ξ_j との順序を変える必要がある場合が生ずるが，それらはすべて反可換とする：

$$\{\xi_i, \xi_j\}=\{\xi_i, d\xi_j\}=\{d\xi_i, d\xi_j\}=0. \tag{11}$$

(10),(11) の定義より，再び，積分演算 $\int d\xi_i$ は偏微分演算 $\partial/\partial\xi_i$ に同等なものとなった。

N 変数 $\xi=(\xi_i)$ の関数 $f(\xi)$ は一般に

$$f(\xi)=f_0+f_1^i\xi_i+f_2^{[ij]}\xi_i\xi_j+\cdots+f_N\xi_N\xi_{N-1}\cdots\xi_2\xi_1 \tag{12}$$

と展開できるが，N 重積分は最後の項の係数をとり出す：

$$\int d^N\xi\, f(\xi)=f_N \qquad d^N\xi\equiv d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_N. \tag{13}$$

A を普通の c 数† を要素とする $N\times N$ 行列として，変数変換

$$\xi'_i=A_i{}^j\xi_j, \qquad d^N\xi=J d^N\xi' \tag{14}$$

を考えよう。このときの Jacobian J は

$$\int d^N\xi\, f(A\xi)=\int J d^N\xi'\, f(\xi') \tag{15}$$

の要求で決まる。$f(A\xi)$ の最後の項 (ξ の N 次項) が

$$f_N \sum_{\{i_1\cdots i_N\}}(A_{Ni_N}\cdots A_{2i_2}A_{1i_1})\xi_{i_N}\cdots\xi_{i_2}\xi_{i_1}=f_N \det A\cdot\xi_N\cdots\xi_2\xi_1 \tag{16}$$

となることから，(15) の左辺は $f_N \det A$ であることがわかる。(15) の右辺は $f_N J$ であるから，

$$d^N\xi = \det A\; d^N(A\xi) \tag{17}$$

の公式を得る。ここでも $\det A$ の出方が通常の積分の場合と逆である。

このように定義した Grassmann 数の積分が，定数をずらす変数変換で値を変えないことはすぐわかる。実際，定 Grassmann 数を α_i として，

† Grassmann 偶な量が入っていてもよい。

$$\int d^N\xi\, f(\xi+\alpha)=\int d^N\xi\, f_N(\xi_N+\alpha_N)\cdots(\xi_1+\alpha_1)$$
$$=f_N=\int d^N\xi\, f(\xi). \tag{18}$$

“複素” Grassmann 数 ψ_i $(i=1, \cdots, N)$ も形式的に，2 組の “実” Grassmann 数 ξ_i, η_i から

$$\psi_i=\xi_i+i\eta_i, \qquad \psi_i^*=\xi_i-i\eta_i \tag{19}$$

で定義する。このとき，“実” の場合と同様に

$$\int d\psi_i\, \psi_i=1, \qquad \int d\psi_i^*\, \psi_i^*=1, \qquad \text{他は } 0 \tag{20}$$

と定義して，“実” 変数 ξ, η の積分規則 (10) と (13) とに矛盾しないことはすぐわかる。

次に応用上有用な δ 関数と Gauss 積分公式について述べよう。まず δ 関数は，1 変数の場合，

$$\delta(\xi)=\xi \tag{21}$$

で定義される。実際これが δ 関数の性質を持つことは

$$\int d\xi\, \delta(\xi-\xi_0)f(\xi)=\int d\xi\, (\xi-\xi_0)(f_0+f_1\xi)=f_0+f_1\xi_0=f(\xi_0) \tag{22}$$

でわかる。また通常の $\int dx\, e^{ipx}=2\pi\delta(p)$ によく似た

$$\int d\xi\, e^{\xi\eta}=\delta(\eta) \tag{23}$$

の公式にも注意しておく。(これは $e^{\xi\eta}=1+\xi\eta$ からすぐ出る。) 次に ξ, η を N 成分ベクトル，A をふつうの数の $N\times N$ 行列としたとき，次の Gauss 積分公式が成り立つ：

$$\int d\eta\, d\xi\, \exp(\xi^T A\eta)=\det A \tag{24}$$

ただし

$$d\eta\, d\xi\equiv(d\eta_1\, d\xi_1)(d\eta_2\, d\xi_2)\cdots(d\eta_N\, d\xi_N)$$
$$=d\eta_N\cdots d\eta_2\, d\eta_1\, d\xi_1\, d\xi_2\cdots d\xi_N \tag{25}$$

である。(24) は $\eta'=A\eta$ の変数変換をし，(17), (23) の公式を使えば出る：

$$(24)\text{ の左辺}=\int\det A\, d\eta' d\xi\, e^{\xi^T\eta'}=\det A\int d\eta'\, \delta^N(\eta')=\det A. \tag{26}$$

(24) の公式は，ξ, η の積分則 (10) のみを使ったので，ξ, η が “実” かどうかによらず成り立つ。したがって “複素” Grassmann 数 ψ, ψ^* についても

$$\int d\psi\, d\psi^*\, \exp(\psi^\dagger A\psi)=\det A \tag{27}$$

を得る。

フェルミオンのコヒーレント状態 まず簡単のため，次の反交換関係を満たす1自由度系のフェルミオン演算子 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\dagger$ を考えよう：

$$\{\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\dagger\}=1, \quad \{\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}\}=\{\boldsymbol{\psi}^\dagger, \boldsymbol{\psi}^\dagger\}=0 \tag{28}$$

$\boldsymbol{\psi}$ を消滅，$\boldsymbol{\psi}^\dagger$ を生成演算子とみなし，真空 $|0\rangle$ と1粒子状態 $|1\rangle$ を

$$\boldsymbol{\psi}|0\rangle=0, \quad |1\rangle=\boldsymbol{\psi}^\dagger|0\rangle \tag{29}$$

で定義する。このとき，消滅演算子 $\boldsymbol{\psi}$ の固有状態

$$\boldsymbol{\psi}|\psi\rangle=\psi|\psi\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi\rangle=|0\rangle-\psi|1\rangle=e^{-\psi\boldsymbol{\psi}^\dagger}|0\rangle \tag{30}$$

は，通常のボソンの場合にならってコヒーレント状態と呼ばれる。この節の初めに述べたように固有値 ψ は Grassmann 数で，演算子 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\dagger$ とも反可換としている[†]。また，Grassmann 数どうしの積や Grassmann 数と演算子の積，の複素共役をとる際には，演算子の積と同様

$$(XY)^*=Y^*X^* \tag{31}$$

とせねばならないことに注意しておこう。よって，(30) の複素共役は

$$\langle\psi|\boldsymbol{\psi}^\dagger=\langle\psi|\psi^*, \quad \langle\psi|=\langle 0|-\langle 1|\psi^*=\langle 0|e^{-\boldsymbol{\psi}\psi^*}, \tag{32}$$

となる。

コヒーレント状態の内積は

$$\langle\psi|\psi'\rangle=\langle 0|0\rangle+\langle 1|\psi^*\psi'|1\rangle=1+\psi^*\psi'=e^{\psi^*\psi'} \tag{33}$$

となり，コヒーレント状態を用いた完全性関係は

$$\int d\psi^* d\psi\, |\psi\rangle e^{-\psi^*\psi}\langle\psi|=1 \tag{34}$$

となる。実際，(34) の左辺は，(30),(32) を用い，$\psi^*\psi$ に比例する項しか積分に効かないことに注意すれば，

$$\begin{aligned}
&\int d\psi^* d\psi(|0\rangle-\psi|1\rangle)(1-\psi^*\psi)(\langle 0|-\langle 1|\psi^*)\\
&=\int d\psi^* d\psi[|0\rangle(-\psi^*\psi)\langle 0|+\psi|1\rangle\langle 1|\psi^*]\\
&=|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|
\end{aligned} \tag{35}$$

となるからである。

大変おもしろいことに，(34) の完全性の式と対照的に，Bose 的演算子 $\mathcal{O}$ のトレース (trace) 演算に対しては

---

† 状態 $|0\rangle$ は Grassmann 偶と約束する。そうすれば $|1\rangle=\boldsymbol{\psi}^\dagger|0\rangle$ は Grassmann 奇で ψ と反可換であることに注意せよ。$\psi|1\rangle=-|1\rangle\psi$.

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{O} \equiv \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle + \langle 1|\mathcal{O}|1\rangle$$
$$= \int d\psi\, d\psi^*\, e^{+\psi^*\psi}\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle \tag{36}$$

の公式を得る。すなわち指数部の符号が (34) と逆になっている。このことが，有限温度系の分配関数 tr $e^{-\beta \boldsymbol{H}}$ の評価に経路積分を応用する際，フェルミオン場が虚時間 $\tau=it$ 方向に β 進んだとき反周期的，$\psi(\tau+\beta)=-\psi(\tau)$，とせねばならない理由を与えることになる (演習問題 4.6)。

以上，1自由度系で話をしたが，多自由度系でも

$$\psi^*\psi=\psi^*_a\psi^a, \qquad \psi\boldsymbol{\psi}^\dagger=\psi^a\boldsymbol{\psi}^\dagger_a, \qquad d\psi^*d\psi=\prod_a d\psi^*_a d\psi^a$$

のように自由度の添字 a を補って理解すればそのまま正しい。

Dirac 場の経路積分　Lagrangian 密度が

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}^\dagger, \boldsymbol{\psi};\ A_\mu) \equiv \bar{\boldsymbol{\psi}}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + e\gamma^\mu A_\mu)\boldsymbol{\psi}(\vec{x}, t) \tag{37}$$

で与えられる Dirac 場の場合の遷移振幅に対する経路積分表式を求めよう。ここで $A_\mu(x)$ は外から掛けた c 数の電磁場としておく。空間座標 $\vec{x}$ を自由度の添字とみなし，$[\boldsymbol{\psi}(\vec{x}, t)]_{\vec{x}}$ を列ベクトル，$[\boldsymbol{\psi}^\dagger(\vec{x}, t)]_{\vec{x}}$ を行ベクトルとし $\boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{\psi}^\dagger(t)$ と記すことにすれば，Hamiltonian $\boldsymbol{H}(t)$ は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(t)M(t)\boldsymbol{\psi}(t) \equiv H(\boldsymbol{\psi}^\dagger(t), \boldsymbol{\psi}(t);\ t) \\ &[M(t)]_{\vec{x}\vec{y}} = [-i\vec{\alpha}\cdot(\vec{\nabla}_x + ie\vec{A}(\vec{x}, t)) + m\beta - eA_0(\vec{x}, t)]\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \tag{38}$$

のごとく“行列” $M(t)$ を使って表せる。

時刻 t の Heisenberg 演算子 $\boldsymbol{\psi}(\vec{x}, t)$ の固有状態を

$$\boldsymbol{\psi}(\vec{x}, t)|\psi, t\rangle = \psi(\vec{x})|\psi, t\rangle \tag{39}$$

として，遷移振幅 $\langle\psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle$ を，ボソン系のときの 4-1 (7) と同じく時間を細かく区切り，各時刻の完全系 (34) を代入し，次のように書く：

$$\begin{aligned} &\langle\psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle \\ &\quad = \int\cdots\int\prod_{j=1}^{N}(d\psi^*_j d\psi_j\langle\psi_{j+1}, t_{j+1}|\psi_j, t_j\rangle e^{-\psi^*_j\psi_j})\langle\psi_1, t_1|\psi_0, t_0\rangle \end{aligned} \tag{40}$$

ただし $\psi_{N+1}=\psi_{\mathrm{F}}, \psi_0=\psi_{\mathrm{I}}$ である。N を充分大きくとると，

$$\begin{aligned} \langle\psi_{j+1}, t_{j+1}|\psi_j, t_j\rangle &= \langle\psi_{j+1}, t_j|(1-i\Delta t\boldsymbol{H}(t_j))|\psi_j, t_j\rangle \\ &= [1-i\Delta t\psi^\dagger_{j+1}M(t_j)\psi_j]\langle\psi_{j+1}, t_j|\psi_j, t_j\rangle \\ &= \exp[\psi^\dagger_{j+1}\psi_j - i\Delta t\psi^\dagger_{j+1}M(t_j)\psi_j] \end{aligned} \tag{41}$$

[(33), (38) を用いた] と評価できるから，(40) にこれを代入して

$$\langle\psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle=\lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\left(\prod_{j=1}^{N}d\psi_j^* d\psi_j\right)e^{+\psi_{N+1}^\dagger\psi_{N+1}}$$
$$\times\exp\sum_{j=0}^{N}[-\psi_{j+1}^\dagger(\psi_{j+1}-\psi_j)-i\Delta tH(\psi_{j+1}^*, \psi_j;\ t_j)] \quad (42)$$

を得る。連続添字 $\vec{x}$ を復活させれば，指数部は (37) の $\mathcal{L}$ を用いて

$$\sum_{j=0}^{N}i\Delta t\int d^3\vec{x}\ \mathcal{L}(\psi_{j+1}^\dagger(\vec{x}), \psi_j(\vec{x});\ A_\mu(\vec{x}, t_j))$$

になっていることがわかるから，結局，フェルミオンの場合も作用積分の指数関数を積分する形の経路積分表式

$$\langle\psi_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|\psi_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}\rangle=\int\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}d^4x\ \mathcal{L}(\psi^\dagger(x), \psi(x);\ A_\mu(x))\right] \quad (43)$$

が得られる。

上では例として電磁場 A_μ を外場として入れたが，スカラー場でも何でもよかった。それに，それらは実は外場ではなく経路積分されるべき c 数場でもよかったのである。したがって，ボソン場 ϕ とフェルミオン場 ψ の相互作用系では，全系の作用積分 $\int d^4x\ \mathcal{L}(\psi^\dagger, \psi, \phi, \partial\phi)$ を用いてすべての場について経路積分すればよい，ということは明らかであろう。

Green 関数の生成汎関数　フェルミオンに対しても質量パラメータ m を $m-i\epsilon$ にする $-i\epsilon$ 処法を用いると，$t_{\mathrm{F}}\to+\infty$，$t_{\mathrm{I}}\to-\infty$ の極限で，境界で指定する波動汎関数の詳細によらなくなり，一意的に真の真空による期待値となる，というのは前と同じである。したがって，ボソンとフェルミオンの一般の相互作用系で Green 関数の生成汎関数は

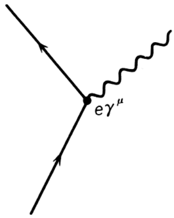
$$Z[J, \eta, \bar{\eta}]\equiv\left\langle 0\left|\mathrm{T}\exp i\int d^4x\,[J(x)\boldsymbol{\phi}(x)+\bar{\eta}(x)\boldsymbol{\psi}(x)+\eta(x)\bar{\boldsymbol{\psi}}(x)]\right|0\right\rangle$$
$$=N\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\exp i\int d^4x\,[\mathcal{L}+J\phi+\bar{\eta}\psi+\eta\bar{\psi}] \quad (44)$$

と書ける。η, $\bar{\eta}$ は Grassmann 数の外場である。(44) はさらに **4-3** と同様にして

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}]=\frac{\left\langle\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{\mathrm{int}}+iJ\cdot\phi+i\bar{\eta}\cdot\psi+i\eta\cdot\bar{\psi}\right]\right\rangle_0}{\left\langle\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{\mathrm{int}}\right]\right\rangle_0} \quad (45)$$

$$\langle\cdots\rangle_0\equiv\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot\Delta_F\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\exp\left[-\frac{\delta}{\delta\psi}\cdot S_F\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right](\cdots)\Big|_{\phi=\psi=\bar{\psi}=0}$$

の形に直せ，$S_F(x-y)=\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_0$ は 2-2 (44) で与えた Dirac 場の Feynman 伝播関数と一致していることがわかる。Grassmann 数の微分はすべて左微分としている。



4·9 図

(45) からまた摂動展開の Feynman 則が読み取れるが，$\eta, \psi, \delta/\delta\psi$ などの反可換性から生ずる符号に注意しなければならない。Feynman グラフにおいて，Dirac 伝播関数 $S_F(x-y)$ に対応する線には，$\bar{\psi}(y)$ から $\psi(x)$ に向かう矢印をつけることにする。4-3 節末の (38) で与えた運動量空間の Feynman 則につけ加えるべきルールは

(i 補)　運動量 p_i の Dirac 外線には $\dfrac{1}{i}\dfrac{1}{m-\not{p}_i-i\epsilon}$ をつける。

(ii 補)　運動量 k の Dirac 内線には $\dfrac{1}{m-\not{k}-i\epsilon}$ をつける。

(iii 補)　各頂点には $\mathcal{L}_{\text{int}}$ の結合定数をつける；例えば $\mathcal{L}_{\text{int}}=e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ の場合は $e\gamma^\mu$ (4·9 図)。　(46)

(iv 補)　Dirac 粒子のループには余分にマイナス符号をつけ，$-\displaystyle\int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}\text{tr}$ を付与する。tr はスピノール添字に関するトレース。

最後の (iv 補) のルールは，例えば 3 頂点ループの場合を考えると

$$(\bar{\psi}_1\gamma_1\psi_1)(\bar{\psi}_2\gamma_2\psi_2)(\bar{\psi}_3\gamma_3\psi_3)$$
$$=-\text{tr}[\gamma_1 S_F(x_1-x_2)\gamma_2 S_F(x_2-x_3)\gamma_3 S_F(x_3-x_1)] \tag{47}$$

のようになるからである。すなわち $\psi_1\bar{\psi}_2$ と $\psi_2\bar{\psi}_3$ は素直に S_F が出る順になっているが，最後の $\bar{\psi}_1\psi_3$ は逆順になっているからひっくり返す必要があり Grassmann 数なのでマイナスが出る。このようにループになっていると必ず戻ってくる部分があって負号がでるのである。tr をとるのはスピノール添字の縮約がつながっているからである。

4-5　有効作用と有効ポテンシャル

ここで**有効作用** (effective action) と呼ばれる非常に重要な汎関数を定義しておこう。**4-3** で述べたように

$$
\begin{aligned}
Z[J]=e^{iW[J]}&=\langle 0|\mathrm{T}\exp[iJ\cdot\boldsymbol{\phi}]|0\rangle \\
&=N\int\mathcal{D}\phi\exp i\{S[\phi]+J\cdot\phi\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

としたとき，$Z[J]$ は Green 関数の，$W[J]$ は連結 Green 関数の，それぞれ生成汎関数であった。ただし，ここでは，いろいろな種類のスカラー場やスピノール場などをひっくるめて $\boldsymbol{\phi}_i(x)$ と記すことにし，

$$J\cdot\boldsymbol{\phi}=\int d^4x\sum_i J_i(x)\boldsymbol{\phi}_i(x), \tag{2}$$

$$S[\phi]=\int d^4x\ \mathcal{L}(\phi(x),\partial\phi(x)), \tag{3}$$

の記号を使う。フェルミオン場に対する外場 J_i は Grassmann 数なので，符号因子を考慮するため次の量を定義しておこう：

$$|i|=\begin{cases}0 & \boldsymbol{\phi}_i\text{ がボソン場}\\ 1 & \boldsymbol{\phi}_i\text{ がフェルミオン場}\end{cases} \tag{4}$$

さて本題の有効作用 $\Gamma[\varphi]$ は，$W[J]$ から汎関数 Legendre (ルジャンドル) 変換を行った量として定義する：

$$\Gamma[\varphi]\equiv W[J]-J\cdot\varphi. \tag{5}$$

ここで $\varphi_i(x)$ は

$$\varphi_i(x)=(\delta/\delta J_i(x))W[J]=\frac{\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}_i(x)\exp[iJ\cdot\boldsymbol{\phi}]|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{T}\exp[iJ\cdot\boldsymbol{\phi}]|0\rangle}, \tag{6}$$

すなわち，$J(x)$ という外場が存在するときの $\boldsymbol{\phi}_i(x)$ の期待値である。$\Gamma[\varphi]$ は $J_i(x)$ の代わりに (6) で決まる $\varphi_i(x)$ の汎関数と考える。(5),(6) の定義より，逆に (Legendre 変換の常として)，(6) に双対な関係式

$$-J_i(x)=\delta\Gamma[\varphi]/\delta\varphi_i(x)=(-)^{|i|}(\delta/\delta\varphi_i)\Gamma[\varphi] \tag{7}$$

も成り立っている†。

1 粒子既約な頂点関数　有効作用が重要である一つの理由，特にくりこみの議論などで有用になる理由は，$\Gamma[\varphi]$ が 1 粒子既約 (1PI; one-

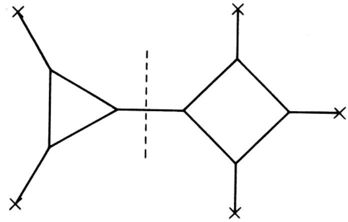
---

† J_i や φ_i が Grassmann 数のときにも正しいように，(6) や (7) では左微分，右微分を区別している。[**2-2** (3) の記法]

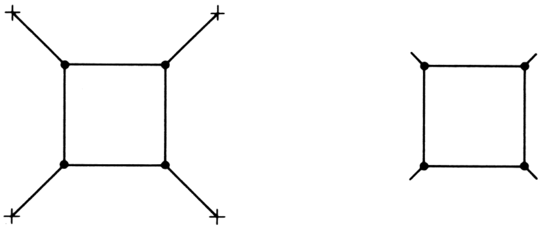
particle-irreducible) な頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ の生成汎関数になっているという点にある：

$$\Gamma[\varphi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\ \varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\Gamma^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(x_1\cdots x_n). \qquad (8)$$

ここで使っている言葉の定義を与えよう：一般に $iW[J]$ に効くグラフで，伝播関数の線を1本切ったときにそのグラフが二つの部分に分離するとき，その線を関節線 (articulation line) と呼ぶ。外場 J を端点とする線，すなわち外線は，常に関節線であるが，外線



4·10 図



(a) (b)

4·11 図 (a) $G^{(4)}_{\text{prop}}$, (b) $\Gamma^{(4)}$ のグラフ例

以外に関節線を持たないグラフを1粒子既約なグラフと呼び，内線にも関節線がある場合を1粒子可約なグラフと呼ぶ。4·10 図は1粒子可約なグラフの例であり，4·11 図 (a) は4点連結 Green 関数 $G^{(4)}_{\text{conn}}$ に効く一つの1粒子既約グラフの例である。1粒子既約なグラフのみから構成される連結 Green 関数をプロパー (proper) Green 関数と呼び $G^{(n)}_{\text{prop}}$ と記す。1粒子既約な頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ (の i 倍) とは，プロパー Green 関数 $G^{(n)}_{\text{prop}}$ から，n 本の外線の伝播関数 Δ_F をもぎとったものと定義する：

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\ \boldsymbol{\phi}_{i_1}(x_1)\cdots\boldsymbol{\phi}_{i_n}(x_n)|0\rangle_{\text{prop}}\\&=\prod_{k=1}^{n}\left(\int d^4y_k\ \Delta_F^{i_kj_k}(x_k-y_k)\right)i\Gamma^{(n)}_{j_1\cdots j_k}(y_1\cdots y_k).\end{aligned} \qquad (9)$$

4·11 図 (a) のグラフから4本の外線をもぎとって得られる 4·11 図 (b) のグラフは $i\Gamma^{(4)}$ に効くグラフの一例である。$n=2$ の場合はいくぶん特殊で，

$\Gamma_{ij}^{(2)}$ には (9) と書ける部分以外に自由伝播関数の逆数の i 倍 $i\Delta_F^{-1\,ij}$ が加わっている [後の (15) 参照]。

さてこれから $\Gamma[\varphi]$ が実際 (9) で定義される 1 粒子既約 (1PI) 頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ の生成汎関数になっていることを証明しよう。まず，$iW[J]$ は **4-3** で述べたように，J なる外場につながったすべての連結グラフの総和で与えられることを思い起こす。また，(6) で定義される c 数の $\varphi_i(x)$ は，x の点から出る $\boldsymbol{\phi}_i$ 粒子の 1 本線に連結したグラフ——tadpole グラフと呼ばれる——すべての総和で与えられる，ということも明らかであろう (4·12 図参照)。そうすれば，$iW[J]$ を一挙に与えそうな候補として次の三つが考えられる：

i) $iW[J]$ に効くグラフは必ず (外線または内線に) 関節線を持つから，4·13 図に示すように，関節線の両側にあらゆる“足をもいだ tadpole グラフ” $\Delta_F^{-1}\varphi$ を付ければ，あらゆる $iW[J]$ のグラフが入ると思われる：すなわち

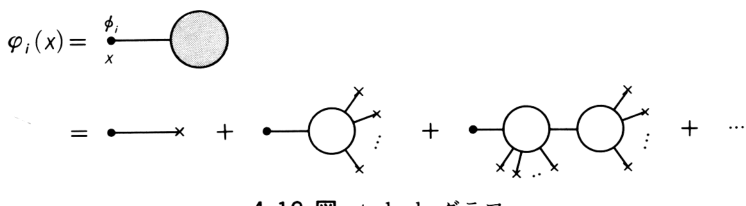
$$iW[J] \overset{?}{=} \frac{1}{2}(\varphi_i \Delta_F^{-1\,ij})\Delta_F^{jk}(\Delta_F^{-1\,kl}\varphi_l) = \frac{1}{2}\varphi_i \Delta_F^{-1\,ij}\varphi_j. \tag{10}$$

ここで $\varphi_i(x)$ の添字 i と座標 x とをひっくるめて添字 i で表し，くり返し添字については“和” $\int d^4x \sum_i$ をとるものと了解する。

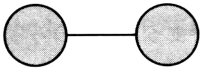
ii) すべての 1 粒子既約なグラフの和を $\kappa^{1PI}[\Delta_F iJ]$ と記す。引数が $\Delta_F iJ$ であるのは，外場 J (の i 倍) から必ず外線伝播関数 Δ_F が出ているからである。そうすれば，この $\Delta_F iJ$ をすべての tadpole グラフの和 φ に置き換えるとあらゆる $iW[J]$ グラフが尽くされると思われる：

$$iW[J] \overset{?}{=} \kappa^{1PI}[\varphi]. \tag{11}$$

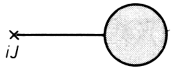
iii) 外場 J_i に注目し，J_i から出る $\boldsymbol{\phi}_i$ 線にすべての tadpole グラフ φ_i を付けると，すべての $iW[J]$ グラフを与えると思われるから (4·14



4·12 図 tadpole グラフ



4・13 図　○ は $\Delta_F^{-1}\varphi$ を表す。

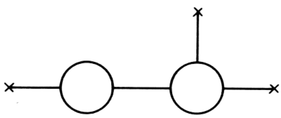


4・14 図

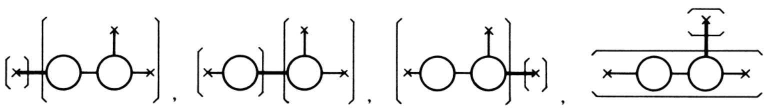
図参照)，

$$iW[J] \overset{?}{=} iJ_i\varphi_i. \tag{12}$$

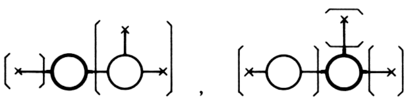
ところが，実は，上の (10) ～ (12) のどれも数え過ぎがあって正しくない。なぜなら，例えば $iW[J]$ に効く一つのグラフとして 4・15 図を考えて見よう。このグラフは関節線の数 $N(l)$ が 4 個あり，上の i) の立場では，



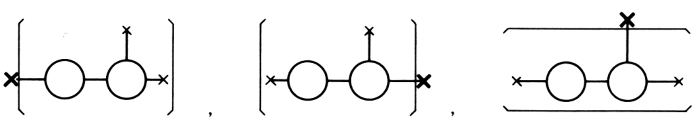
4・15 図



4・16 図　太線を関節線，〔　〕のまとまりを足を切った tadpole $\Delta_F^{-1}\varphi$ と見る。



4・17 図　太線の部分を 1PI 部分 κ^{1PI}，〔　〕の部分を引数の tadpole φ と見る。



4・18 図　太線の×を外場 iJ，〔　〕のまとまりを tadpole φ と見る。

4・16 図に示すようにどの関節線に注目するかで，4・15 図の一つのグラフを $N(l)=4$ 回 数えていることになる。同様に，4・15 図のグラフには 1 粒子既約なグラフとみなせる部分が $N(\mathrm{1PI})=2$ 箇所あり， ii) の立場では，

4·17図に示すように一つのグラフを $N(1\mathrm{PI})=2$ 回数えていることになる。さらに，iii) の立場では，4·18図に示すように，どの外場 J に注目するかで，外場 J の数 $N(J)=3$ の回数だけ数えている。

しかしながら，うまい具合に，どんなグラフにおいても一般に

$$-N(l)+N(1\mathrm{PI})+N(J)=1 \tag{13}$$

の関係が成り立つことが簡単にわかる†。それゆえ，i), ii), iii) の立場の答がそれぞれ数え過ぎでも，この組合せで加えた $-(10)+(11)+(12)$ では，どのグラフも正しく1回だけ加えたことになる。したがって

$$iW[J]=-\frac{1}{2}\varphi_i \Delta_F^{-1\ ij}\varphi_j+\kappa^{1\mathrm{PI}}[\varphi]+iJ_i\varphi_i, \tag{14}$$

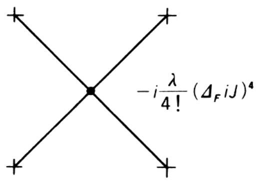
それゆえ，(5) の定義を使えば，

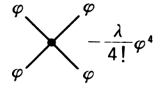
$$i\Gamma[\varphi]=-\frac{1}{2}\varphi_i \Delta_F^{-1\ ij}\varphi_j+\kappa^{1\mathrm{PI}}[\varphi] \tag{15}$$

を得る。この式で $\Gamma[\varphi]$ が1粒子既約な頂点関数の生成汎関数であることを証明したことになる。

有効作用の物理的意味　tree レベルの近似(ループを含まないグラフを tree グラフと呼び，tree グラフのみを考える近似) では，$iW[J]$ に効く1粒子既約なグラフ $\kappa^{1\mathrm{PI}}[\Delta_F iJ]$ は，例えば ϕ^4 理論では4·19図(a) のみで，したがって $\kappa^{1\mathrm{PI}}[\varphi]$ は4·19図(b)，すなわち $i\int d^4x[\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\varphi)=-(\lambda/4!)\varphi^4]$ となる。ところが (15) の第1項も実は

$$i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\varphi(x)(\Box+\mu^2)\varphi(x)\right]=i\int d^4x\mathcal{L}_{2次}(\varphi) \tag{16}$$





4·19 図

---

† 実際，ある一つのグラフから，関節線を1個増やそうとすると必ず1粒子既約部分か外場 J のどちらかが1個増える，ということに気付けば明らかであろう。

と作用積分の 2 次の項となっている。これは ϕ^4 理論に限らず一般的な事情で，$\Gamma[\varphi]$ は tree レベルでは古典的作用積分 $S[\varphi]$ に一致する：

$$\Gamma[\varphi]=\int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi)+i^{-1}\kappa^{\mathrm{1PI}}_{\mathrm{loop}}[\varphi]. \tag{17}$$

第 2 項はループ・グラフ，すなわち量子補正，の寄与でその系統的な評価法は後に与える。

実際に実現される $\boldsymbol{\phi}_i(x)$ の期待値 $\langle 0|\boldsymbol{\phi}_i(x)|0\rangle=\varphi_i(x)$ は，外場 $J_i(x)$ が 0 の場合であるから，(7) より

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)}=0 \tag{18}$$

の方程式を満たさねばならない。(17) は，この方程式 (18) が tree レベルでちょうど古典論の Euler-Lagrange 方程式になることを示している。したがって，(18) 自身はすべての量子効果を取り入れた，一般化された Euler-Lagrange 方程式である。$\Gamma[\varphi]$ が有効作用と呼ばれるゆえんである。有効作用が重要であるもう一つの理由がここにあり，量子効果まで考慮したとき，どのような場の期待値 $\varphi_i(x)$ が実現されるのか，特に後で述べる “対称性の自発的破れ” が起こるのかどうか，という問題を議論する際に必要不可欠の道具立てを与えるのである。

有効作用の物理的意味をさらに理解すべく，より特殊な場合を考えよう。一つは，外場 J と期待値 φ とが共に時間 x^0 に依存しない場合である。その場合，時間並進不変性があるので，$W[J]$ や $\Gamma[\varphi]$ から無限大の時間因子 $T\equiv\int dx^0$ がくくり出せて，

$$\begin{aligned} W[J(x)=J(\vec{x})] &=-w[J(\vec{x})]\int dx^0,\\ \Gamma[\varphi(x)=\varphi(\vec{x})] &=-\mathcal{E}[\varphi(\vec{x})]\int dx^0. \end{aligned} \tag{19}$$

さらに，J や φ が時空座標 x に完全に依存しない定数の場合に制限すると，4 次元体積がくくり出せて，

$$\begin{aligned} W[J(x)=J]&=-w(J)\int d^4x,\\ \Gamma[\varphi(x)=\varphi]&=-V(\varphi)\int d^4x. \end{aligned} \tag{20}$$

$V(\varphi)$ は φ の関数で**有効ポテンシャル** (effective potential) と呼ばれる。3 次元関数 $\varphi_i(\vec{x})$ の汎関数である $\mathcal{E}[\varphi]$ には決まった名はないが，$V(\varphi)$ に

ならって，有効エネルギー (effective energy) と呼んでおこう。

J や φ が x^0 に依存しないときを考えよう。そのとき (1) は

$$e^{-iw[J]T}=\langle 0|e^{-i\boldsymbol{H}[J]T}|0\rangle \tag{21}$$

$$\boldsymbol{H}[J]\equiv\boldsymbol{H}-\int d^3x\, J(\vec{x})\boldsymbol{\phi}(\vec{x}) \tag{22}$$

と書ける(演習問題 4.7)。$\boldsymbol{\phi}(\vec{x})$ は Schrödinger 表示の演算子である。$|0\rangle$ は $\boldsymbol{H}$ の基底状態であったが，ここでも $-i\epsilon$ 処法を採用しているものとすれば，4-2 で議論したように，$T=\int dx^0$ が無限大の極限では，事実上 (22) の $\boldsymbol{H}[J]$ の基底状態 $|0_J\rangle$ のみが (21) の右辺に効く。したがって $T\to\infty$ では (19) の $w[J]$ は，$\boldsymbol{H}[J]$ の基底状態のエネルギー固有値となる。

$$\boldsymbol{H}[J]|0_J\rangle=w[J]|0_J\rangle. \tag{23}$$

他方，この固有値問題は，

$$\langle\Psi|\Psi\rangle=1,\qquad \langle\Psi|\boldsymbol{\phi}(\vec{x})|\Psi\rangle=\varphi(\vec{x}) \tag{24}$$

という拘束条件の下で $\langle\Psi|\boldsymbol{H}|\Psi\rangle$ を停留にする停留解 $|\Psi\rangle$ を求める問題とみなすことができる。実際，(24) の拘束条件に対し Lagrange multiplier E と $J(\vec{x})$ とを，それぞれ用意すれば，拘束条件なしに

$$\left\langle\Psi\middle|\left(\boldsymbol{H}-E-\int d^3x\, J(\vec{x})\boldsymbol{\phi}(\vec{x})\right)\middle|\Psi\right\rangle \tag{25}$$

を停留にする問題になり，これを変分して (23) の形の固有値方程式

$$\boldsymbol{H}[J]|\Psi\rangle=E|\Psi\rangle \tag{26}$$

を得る。この基底状態の解が $|\Psi\rangle=|0_J\rangle$，$E=w[J]$ である。

このとき，$|0_J\rangle$ は (25) の停留解であるから，任意の変分 δ に対し，$\langle 0_J|(\delta\boldsymbol{H}[J]-\delta w[J])|0_J\rangle=0$ が成り立ち，特に左 J 微分をとれば，$(\delta/\delta J(\vec{x}))\boldsymbol{H}[J]=-\boldsymbol{\phi}(\vec{x})$ より

$$(\delta/\delta J(\vec{x}))w[J]=-\langle 0_J|\boldsymbol{\phi}(\vec{x})|0_J\rangle=-\varphi(\vec{x}) \tag{27}$$

が従う。よって，(23), (5), (6), (19) より

$$\begin{aligned}\langle 0_J|\boldsymbol{H}|0_J\rangle&=w[J]+\int d^3x\langle 0_J|J(\vec{x})\boldsymbol{\phi}(\vec{x})|0_J\rangle\\&=w[J]-\int d^3x\, J(\vec{x})(\delta/\delta J(\vec{x}))w[J]\\&=\mathcal{E}[\varphi]\end{aligned} \tag{28}$$

となることがわかる。したがって，結局，有効エネルギー $\mathcal{E}[\varphi]$ というものは，「$\langle\Psi|\Psi\rangle=1$ で，$\boldsymbol{\phi}(\vec{x})$ の期待値 $\langle\Psi|\boldsymbol{\phi}_i(\vec{x})|\Psi\rangle$ が $\varphi_i(\vec{x})$ であるという条件の下での基底状態 $|\Psi\rangle=|0_J\rangle$，におけるエネルギー $\boldsymbol{H}$ の期待値」であ

るということになる。

場の理論における真空を探す場合は，あらかじめ並進不変性を考慮して，x に依存しない φ の関数である (20) の有効ポテンシャル $V(\varphi)$ の停留点

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi_i}=0 \tag{29}$$

を求める。上の議論により，**有効ポテンシャル $V(\varphi)$ は，$\phi_i(x)$ の期待値が φ_i (定数) である条件下での基底状態のエネルギー密度**と解釈できる量であることがわかる。

有効作用 $\Gamma[\varphi]$ が 1 粒子既約な頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ の生成汎関数であることから従う，有効ポテンシャル $V(\varphi)$ のもう一つの側面に注意しておこう。頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ の運動量表示 $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ を，運動量保存 δ 関数を外して

$$\int d^4x_1\cdots d^4x_n\, e^{ip_1x_1+\cdots+ip_nx_n}\Gamma^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(x_1\cdots x_n)$$
$$\equiv \tilde{\Gamma}^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(p_1\cdots p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n) \tag{30}$$

で定義すれば，(8) で $\varphi_i(x)=\varphi_i$ (定数) と置き，(20) の $V(\varphi)$ の定義式および $(2\pi)^4\delta^4(p=0)=\int d^4x\, e^{ipx}|_{p=0}$ を考慮して，

$$V(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_n}[-\tilde{\Gamma}^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(0,0,\cdots,0)] \tag{31}$$

を得る。すなわち，**有効ポテンシャル $V(\varphi)$ は運動量 p_i がすべて 0 のときの n 点頂点関数の値 $\tilde{\Gamma}^{(n)}(0,0,\cdots,0)$ の生成関数**という意味も持っているのである。

有効作用・有効ポテンシャルの評価法　有効作用 $\Gamma[\varphi]$ を求めるには (15)，あるいは (17) で充分で，とにかく 1 粒子既約なグラフを足し上げればよいのだが，ここでもう少し能率よい評価法を与えよう。

$W[J]$ の経路積分表式 (1) を $\Gamma[\varphi]$ の定義式 (5) に代入して

$$\Gamma[\varphi]=-i\hbar\ln\int \mathcal{D}\phi\exp\frac{i}{\hbar}[S[\phi]+J\cdot(\phi-\varphi)] \tag{32}$$

ここでプランク定数 $\hbar$ を便宜上復活させた。経路積分変数 ϕ を $\phi+\varphi$ へ変数変換し，(7) を代入すれば

$$\Gamma[\varphi]=-i\hbar\ln\int \mathcal{D}\phi\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4x[\mathcal{L}(\phi+\varphi)-(\delta\Gamma[\varphi]/\delta\varphi)\phi] \tag{33}$$

となる。ここで，$\mathcal{L}(\phi+\varphi)$ を“c 数”場 $\varphi_i(x)$ のまわりで“量子論的”場 $\phi_i(x)$ に関して展開する：

$$\mathcal{L}(\phi+\varphi)=\mathcal{L}(\varphi)+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi)}{\partial\varphi_i}\phi_i+\frac{1}{2}\phi_i\, i[D_F^{-1}(\varphi)]^{ij}\phi_j+\mathcal{L}_{\rm int}(\phi\,;\,\varphi) \quad (34)$$

ここに，

$$i[D_F^{-1}(\varphi)]^{ij}=\left.\frac{\partial^2\mathcal{L}(\phi+\varphi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\phi=0}=\frac{\partial^2\mathcal{L}(\varphi)}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} \quad (35)$$

で与えられる D_F^{-1} は，場の期待値が φ であるような真空の上での伝播関数の逆数であり，$\mathcal{L}_{\rm int}(\phi;\ \varphi)$ は ϕ について 3 次以上†の（φ のあるときの）相互作用項である。[(35)中の微分は，正確には，$\partial/\partial\varphi_i$ は左，$\partial/\partial\varphi_j$ は右微分である。] (34) を (33) に代入すると，

$$\Gamma[\varphi]=\int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi)+\tilde{\Gamma}[\varphi], \quad (36)$$

$$\tilde{\Gamma}[\varphi]=-i\hbar\ln\int\mathcal{D}\phi\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi iD_F^{-1}(\varphi)\phi+\mathcal{L}_{\rm int}(\phi\,;\,\varphi)-(\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi)\phi\right]. \quad (37)$$

(36) でうまく古典的作用積分 $\int d^4x\mathcal{L}$ の項が分離されたことに注意したい。(36) と上の (17) とを比較すれば，第 2 項 $\tilde{\Gamma}[\varphi]$ は 1 粒子既約な loop グラフの寄与 $i^{-1}\kappa_{\rm loop}^{\rm 1PI}[\varphi]$ に等しいことがわかる。

$\tilde{\Gamma}[\varphi]$ の表式 (37) は，そのような 1 粒子既約な loop グラフの系統的な評価法を与えることになる。すなわち，伝播関数を $D_F(\varphi)$ とし，$\mathcal{L}_{\rm int}(\phi;\ \varphi)$ で指定される相互作用頂点を用いて，すべての 1 粒子既約グラフを評価せよ，ということである。(37) の指数部の最後の ϕ の 1 次項 $-(\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi)\phi$ は単に「1 粒子可約なグラフは落としてよい」ということを保証する項である。このことは $\tilde{\Gamma}[\varphi]$ が $i^{-1}\kappa_{\rm loop}^{\rm 1PI}[\varphi]$ に等しい事実からも明らかであるが，次のように直接形式的に示すこともできる。すなわち (37) を

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\Gamma}[\varphi]\right)=\int\mathcal{D}\phi\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4x[\tilde{\mathcal{L}}(\phi\,;\,\varphi)+\tilde{J}[\varphi]\phi] \quad (38)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\phi\,;\,\varphi)=\frac{1}{2}\phi iD_F^{-1}(\varphi)\phi+\mathcal{L}_{\rm int}(\phi\,;\,\varphi) \quad (39)$$

$$\tilde{J}[\varphi]=-\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi \quad (40)$$

と書いてみれば，$\tilde{\Gamma}[\varphi]$ は，Lagrangian 密度が (39) の $\tilde{\mathcal{L}}(\phi\,;\,\varphi)$ である系

---

† くりこみをやる場合も考えてもっと正確に言えば，$\mathcal{L}_{\rm int}(\phi\,;\,\varphi)$ は ϕ について 3 次以上の相互作用項と共に ϕ の次数の低いくりこみ相殺項も含んでいる。

の，(40) の外場 $\tilde{J}[\varphi]$ があるときの連結グラフの総和 $W[\tilde{J}[\varphi]]$ であると理解できる。ところが，(40) で与えられる外場 $\tilde{J}[\varphi]$ の下ではちょうど tadpole グラフが

$$\begin{aligned}&\langle\phi_i(x)\rangle_{\tilde{J}[\varphi]}\\&\equiv\int\mathcal{D}\phi\ \phi_i(x)\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4x[\tilde{\mathcal{L}}(\phi\,;\,\varphi)+\tilde{J}[\varphi]\phi]=0\end{aligned} \tag{41}$$

で 0 となるので，グラフの途中で ϕ の 1 本線になるグラフ——すなわち 1 粒子可約グラフ——の寄与は全体として 0 になるのである。(41) の証明は，もとの (1) の系で，$\phi_i(x)$ の期待値 (tadpole) が $\varphi_i(x)$ であるという (6) を

$$\int\mathcal{D}\phi\,(\phi_i(x)-\varphi_i(x))\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4x[\mathcal{L}(\phi)+J\phi]=0 \tag{42}$$

と書き，変数変換 $\phi\ \rightarrow\ \phi+\varphi$ を行い，(7), (34), (36) を用いれば，すぐにできる。

表式 (37) が，$i^{-1}\kappa^{\mathrm{1PI}}_{\mathrm{loop}}[\varphi]$ の評価をどのくらい系統的にするかを，ϕ^4 理論†

$$\mathcal{L}(\phi)=\frac{1}{2}\phi i\Delta_F^{-1}\phi-\frac{\lambda}{4!}\phi^4,\qquad i\Delta_F^{-1}=-(\Box+\mu^2) \tag{43}$$

をとって具体的に見てみよう。このとき，(34) の展開を行うと

$$iD_F^{-1}(\varphi)=i\Delta_F^{-1}-\frac{\lambda}{2}\varphi^2(x), \tag{44}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi\,;\,\varphi)=-\frac{\lambda}{3!}\varphi\phi^3-\frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{45}$$

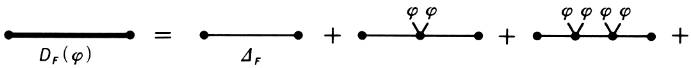
となる。したがって，$\langle\phi(x)\rangle_J=\varphi(x)$ があるときの伝播関数 $D_F(\varphi)$ は，

$$\begin{aligned}D_F(\varphi)_{xy}&=\Big(\Delta_F^{-1}+i\frac{\lambda}{2}\varphi^2\Big)^{-1}_{xy}\\&=\Delta_F(x-y)+\int dz\,\Delta_F(x-z)\Big(-\frac{i\lambda}{2}\varphi^2(z)\Big)\Delta_F(z-y)\\&\quad+\int dz_1dz_2\,\Delta_F(x-z_1)\Big(-\frac{i\lambda}{2}\varphi^2(z_1)\Big)\Delta_F(z_1-z_2)\\&\qquad\times\Big(-\frac{i\lambda}{2}\varphi^2(z_2)\Big)\Delta_F(z_2-y)+\cdots\end{aligned} \tag{46}$$

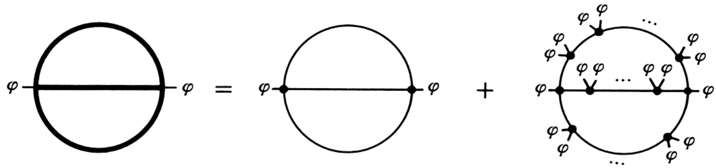
となり，4・20 図に示されるような無限個のグラフをあらかじめ足し上げたものに相当する。それゆえ，例えば，(45) の ϕ^3 相互作用項 $(-\lambda/3!)\varphi\phi^3$ を

---

† 簡単のため，$(1/2)(\mu^2-\mu_0^2)\phi^2$ などのくりこみ相殺項を無視した。これら相殺項を考慮するときは (45) の $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi\,;\,\varphi)$ に入れる。



4·20 図



4·21 図

2 回使った 2-loop グラフは，4·21 図に示すような無限個の一群のグラフを足し上げることと等価になる。

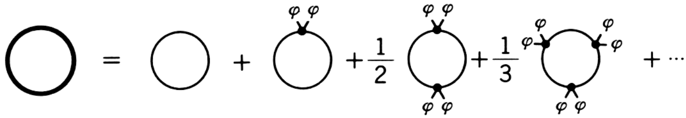
(36),(37) は，さらに，Gauss 積分公式 **4-2** (9) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[\varphi] \\
&=\int d^4x\ \mathcal{L}(\varphi)+\frac{i}{2}\hbar \ln \mathrm{Det}[iD_F^{-1}(\varphi)] \\
&\quad -i\hbar \ln\left\{\frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi iD_F^{-1}(\varphi)\phi+\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi;\ \varphi)-(\delta\tilde{\Gamma}[\varphi]/\delta\varphi)\phi\right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[\frac{1}{2}\phi iD_F^{-1}(\varphi)\phi\right]}\right\}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

と書ける。あらわに分離した第 2 項の Det は時空座標およびその他のすべての場の添字についての行列式である。もし Dirac 場が含まれていれば，その部分に関して第 2 項は，複素 Grassmann 数の Gauss 積分公式 **4-4** の (27) を用いて，

$$
-i\hbar \ln \mathrm{Det}[iD^{-1}_{F,\mathrm{Dirac}\,場}(\varphi)] \tag{48}
$$

と理解せねばならない。[また，もし行列 iD_F^{-1} が，ボソン部分とフェルミオン部分に分離していないときは，(47) の Det は，超行列式 (super-determinant) または Berezian (ベレジアン) 行列式と呼ばれるものと解さねばならない (演習問題 4.8 参照)。] (47) の第 2 項は，ϕ^4 理論の場合に具体的に 4·22 図に示すように，1-loop グラフの寄与を表している。第 3 項は，4·21 図のようなグラフを初めとする 2-loop 以上のグラフの寄与に相当する。



4・22 図

特に, (47) で $\varphi_i(x)$ を時空座標 x に依存しない定数 φ_i とおけば, 有効ポテンシャル $V(\varphi)$ の評価公式が得られる：

$$V(\varphi)=V_0(\varphi)+\frac{1}{2}\hbar\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln\det[iD_F^{-1}(k;\ \varphi)] \\ +i\hbar\left\langle\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \mathcal{L}_{\rm int}(\phi;\ \varphi)\right)\right\rangle_{\rm 1PI} \tag{49}$$

$V_0(\varphi)$ は古典的 Lagrangian $\mathcal{L}(\varphi)$ の中のポテンシャル項, 第 2 項の det は, 時空座標以外の場の添字に関する行列式であり, 第 3 項は, $D_F(k;\ \varphi)$ を伝播関数とし, $\mathcal{L}_{\rm int}(\phi;\ \varphi)$ で与えられる相互作用頂点を用いた 2-loop 以上の 1 粒子既約グラフの寄与を表す。(47) の第 2 項が (49) の第 2 項になる理由は次のようにわかる。一般に, 等式

$$\ln{\rm Det}\ iD_F^{-1}(\varphi)={\rm Tr\ Ln}\det(iD_F^{-1}(\varphi)) \tag{50}$$

が汎関数の (時空座標を添字とした) 意味の行列式 Det, トレース Tr, 対数 Ln に対して成立する。ところが, $\varphi_i(x)=\varphi_i$(定数) の場合は, $iD_F^{-1}(\varphi)$ は運動量空間で表示したとき対角的な

$$iD_{F,ij}^{-1}(\varphi)_{k,q}=iD_{F,ij}^{-1}(k;\ \varphi)\delta^4(k-q) \tag{51}$$

の形となる。トレース Tr は $k=q$ の対角成分を足し上げる演算なので, (51) を (50) に代入して

$$\ln{\rm Det}\ iD_F^{-1}(\varphi)={\rm Tr}[\delta^4(k-q)\ln\det(iD_F^{-1}(k;\ \varphi))] \\ =(2\pi)^4\delta^4(0)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\det(iD_F^{-1}(k;\ \varphi)). \tag{52}$$

ここで $(2\pi)^4\delta^4(0)=\int d^4x\ e^{ikx}|_{k=0}=\int d^4x$ は全時空間の体積であるから, 定義 (20) により, 有効作用 $\Gamma[\varphi]$ から有効ポテンシャル $V(\varphi)$ を得るときにちょうど割算すべき因子であり, 結局 (47) の第 2 項の形に帰着する。

1-loop 項までの有効ポテンシャル Lagrangian 密度が (43) で与えられる ϕ^4 理論の場合には, (49) の第 1 項 $V_0(\varphi)$ および第 2 項 $V_1(\varphi)$ は, それぞれ

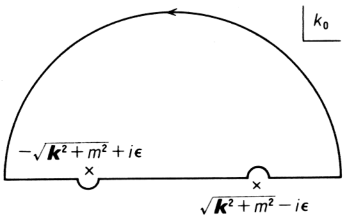
$$V_0(\varphi)=\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2+\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{53}$$

$$V_1(\varphi)=\frac{\hbar}{2}\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln\left(\mu^2+\frac{\lambda}{2}\varphi^2-k^2-i\epsilon\right) \tag{54}$$

となる。$\phi(x)$ の期待値 φ が x に依存しない定数で存在するとき，その効果は，単に伝播関数の（2 乗）質量項を $\mu^2\to\mu^2+(\lambda/2)\varphi^2$ とずらすことになる，という点に注意しておこう。1-loop 項のポテンシャル $V_1(\varphi)$ の物理的意味は次のように変形すると，より明らかになる：

$$\begin{aligned}V_1(\varphi)-V_1(0)&=\hbar\int_{\mu^2}^{\mu^2+\frac{\lambda}{2}\varphi^2}dm^2\,\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{1}{m^2-k^2-i\epsilon}\\&=\hbar\int_{\mu^2}^{\mu^2+\frac{\lambda}{2}\varphi^2}dm^2\,\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}}\\&=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{\hbar}{2}\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2+\frac{\lambda}{2}\varphi^2}-\frac{\hbar}{2}\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}\right).\end{aligned} \tag{55}$$

第 2 行目へいくときに，dk_0 積分を 4·23 図の経路をとって評価した。第 3 行目の第 1 項が $V_1(\varphi)$ に対応しており，この表式は，ちょうど **2-1** の (18) で出会った，2 乗質量が $\mu^2+(\lambda/2)\varphi^2$ の自由スカラー場の零点振動エネルギー密度と一致していることがわかる。同様な評価を Dirac 場の 1-loop 有効ポテンシャルに対して行えば，それもまた，自由 Dirac 場の“占有された”負エネルギー状態の（単位体積当りの）エネルギーの総和であることがわかる。このとき，Grassmann 数の Gauss 積分の行列式の出方が通常のボソンの場合の逆数であることが，有効ポテンシャルに逆符号で効くことにちょうど対応していることに注意しておきたい。



4·23 図

$\hbar$ べき展開としての loop 展開　ついでながら，ここでグラフに含まれるループ数による展開が，$\hbar$ についてのべき展開と一致していることを注意しておこう。一般に (32) における $a=\hbar/i$ の因子のように

$$\frac{1}{a}\Gamma[\varphi]=\ln\int\mathcal{D}\phi\,\exp\frac{1}{a}[S[\varphi]+J\cdot(\phi-\varphi)] \tag{56}$$

の形で，指数部の作用積分全体にかかっている因子 a があるとすると，伝播関数は a に比例し，相互作用頂点は a^{-1} に比例する。したがってあるグ

ラフの中の伝播関数の数を P, 頂点の数を V とすれば，そのグラフは a^{P-V} に比例することになる。ところが，4-3 の (39) で注意したように，P と V とループの数 L との間には，一般に

$$P-(V-1)=L \tag{57}$$

の関係が成り立つので，L ループのグラフは a^{L-1} に比例する。(56) の $\Gamma[\varphi]$ は a^{-1} を外しているので，結局 $\Gamma[\varphi]$ には，L ループのグラフがちょうど $a=\hbar/i$ の L 乗に比例した寄与を与えることになるのである。したがって loop 展開が $\hbar$ 展開である。このことから，ついでに，虚数因子 i も同じであることがわかる：伝播関数や頂点から一切 i を外し，ループ積分にだけ i^{-1} をつけ $\int\frac{d^4l}{i(2\pi)^4}$ とすればよい。この事実はすでに，我々の 4-3 の最終の Feynman 則 (38) にとり入れてある。

4-6　S 行列生成汎関数と散乱断面積

S 行列要素の生成汎関数　この項の議論はスピノール場でもベクトル場でも同様に当てはまるが，記号の簡単のため実スカラー場の場合に則して話を進める。実スカラー場 $\boldsymbol{\phi}_i(x)$ の漸近場 $\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{as}}(x)$ (as＝in, out) は

$$\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{as}}(x)=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}(a_i(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a_i^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}), \tag{1}$$

$$[a_i(\boldsymbol{k}), a_j^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta_{ij}\,\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}), \qquad k_0=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu_i^2} \tag{2}$$

のように，生成・消滅演算子に展開される。そこで，コヒーレント状態 (coherent state) と呼ばれる，$a_i(\boldsymbol{k})$ の固有状態を次のように導入する：

$$a_i(\boldsymbol{k})|\varphi\rangle=\varphi_i(\boldsymbol{k})|\varphi\rangle, \qquad (\varphi_i(\boldsymbol{k})：\text{複素固有値}) \tag{3}$$

$$|\varphi\rangle\equiv\exp\left[\int d^3\boldsymbol{k}\ \varphi_i(\boldsymbol{k})a_i^\dagger(\boldsymbol{k})\right]|0\rangle. \tag{4}$$

ここでもくり返し添字については和をとるものと了解しておく。このとき，一般に $a_i^\dagger(\boldsymbol{k}), a_j(\boldsymbol{q})$ の正規積で与えられる関数

$$\begin{aligned}F(a^\dagger, a)&=\sum f^{(n,m)}_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_m}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n\,;\,\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_m)\\&\quad\times a_{i_1}^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\cdots a_{i_n}^\dagger(\boldsymbol{k}_n)a_{j_1}(\boldsymbol{q}_1)\cdots a_{j_m}(\boldsymbol{q}_m)\\&=\,:F(a^\dagger, a):\end{aligned} \tag{5}$$

に対しては，(3) およびその hermite 共役の式 $\langle\varphi|a_i^\dagger(\boldsymbol{k})=\langle\varphi|\varphi_i^*(\boldsymbol{k})$ より

$$\langle\varphi|F(a^\dagger, a)|\varphi'\rangle=F(\varphi^*, \varphi')\langle\varphi|\varphi'\rangle \tag{6}$$

が成り立つ。内積部分 $\langle\varphi|\varphi'\rangle$ に関しては，付録 D (3) の公式

$$e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A \tag{7}$$

($[A, B]$ が A とも B とも可換のとき成立) を用いて，(4), (2) より

$$\langle\varphi|\varphi'\rangle = \exp\left[\int d^3\boldsymbol{k}\ \varphi_i^*(\boldsymbol{k})\varphi_i'(\boldsymbol{k})\right] \tag{8}$$

を得る。

さて，コヒーレント状態を利用して，**3-3** (26) で与えた S 行列演算子 S に対する Haag-GLZ 公式

$$S = :\exp(\boldsymbol{\phi}^{\text{in}} K\,\delta/\delta J): \langle 0|\mathrm{T}\exp(iJZ^{-1/2}\boldsymbol{\phi})|0\rangle|_{J=0} \tag{9}$$

を，S 行列要素生成汎関数の形に書き直すことができる。ただし，(9) では，**3-3** の $\boldsymbol{\phi}(x)$ がくりこまれた Heisenberg 場 $Z^{-1/2}\boldsymbol{\phi}$ を表していたことを考慮した。また，(9) は多種類の (スカラー) 場 $\boldsymbol{\phi}_i$ の場合に拡張しているので，**3-3** の (16), (24), (25) に対応する略記は

$$\begin{aligned} &K_{i,x} = \Box_x + \mu_i^2, \qquad iJZ^{-1/2}\boldsymbol{\phi} = i\int d^4x\ J_i(x)Z_i^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_i(x) \\ &\boldsymbol{\phi}^{\text{in}} K\,\delta/\delta J = \int d^4x\ \boldsymbol{\phi}_i^{\text{in}}(x)\vec{K}_{i,x}\ \delta/\delta J_i(x) \end{aligned} \tag{10}$$

を表し，μ_i, Z_i は i 粒子の質量およびくりこみ定数である。(9) の両辺を，$\boldsymbol{\phi}_i^{\text{in}}$ に対する (4) のコヒーレント状態ではさめば，(6) を用いて

$$\langle\varphi|S|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle\exp(\varphi K\,\delta/\delta J)\ \langle 0|\mathrm{T}\exp(iJZ^{-1/2}\boldsymbol{\phi})|0\rangle|_{J=0} \tag{11}$$

となるが，ここで $\exp(\varphi K\,\delta/\delta J)$ の中の $\varphi_i(x)$ は (1) の $a_i(\boldsymbol{k}), a_i^\dagger(\boldsymbol{k})$ を固有値 $\varphi_i(\boldsymbol{k}), \varphi_i^*(\boldsymbol{k})$ に置き換えて得られる c 数 4 次元場

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &\equiv \langle\varphi|\boldsymbol{\phi}_i^{\text{in}}(x)|\varphi\rangle \\ &= \int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}(\varphi_i(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + \varphi_i^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}) \end{aligned} \tag{12}$$

である†。(11) は S 行列要素の生成汎関数

$$S[\varphi] \equiv \langle\varphi|S|\varphi\rangle \tag{13}$$

を与えている。実際，コヒーレント状態 (4) の定義式を用いると

$$\left.\frac{\delta^{n+m}S[\varphi]}{\delta\varphi_{i_1}^*\cdots\delta\varphi_{i_n}^*\delta\varphi_{j_1}\cdots\delta\varphi_{j_m}}\right|_{\varphi=0} = \langle 0|a_{i_1}\cdots a_{i_n}S\,a_{j_1}^\dagger\cdots a_{j_m}^\dagger|0\rangle \tag{14}$$

となり，確かに，初期状態 $a_{j_1}^\dagger\cdots a_{j_m}^\dagger|0\rangle$ から終状態 $a_{i_1}^\dagger\cdots a_{i_n}^\dagger|0\rangle$ への遷移に対する S 行列要素を与えている。(φ_i, a_i 等は $\varphi_i(\boldsymbol{k}_i), a_i(\boldsymbol{k}_i)$ の略記である。)

---

† もちろん，独立な自由度としては 3 次元関数 $\varphi_i(\boldsymbol{k}), \varphi_i^*(\boldsymbol{k})$ の分だけである。

(11) の右辺に，4-2 (20) の $Z[J]$ に対する経路積分表式を用いれば，

$$S[\varphi]=\langle\varphi|\varphi\rangle\exp(\varphi K\,\delta/\delta J)N\int\mathcal{D}\phi\,\exp i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi)+J_i(x)\phi_i(x)]\,|_{J=0}$$
$$=\exp\left[\int d^3\boldsymbol{k}\,|\varphi_i(\boldsymbol{k})|^2\right]\cdot N\int\mathcal{D}\phi\,\exp i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi)+\varphi_i(x)\vec{K}_{i,x}\phi_i(x)] \tag{15}$$

の簡単な表式を得る。ただし，ここでは，くりこまれた Heisenberg 場 $Z^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_i$ の固有値を ϕ_i とした経路積分表式を使った。[したがって，ここの $\mathcal{L}(\phi)$ はくりこみ相殺項を含むものである。詳しくは 7 章を参照。] $\langle\varphi|\varphi\rangle$ を (8) を用いて書き換えた (15) の第 2 式の初めの指数関数因子は，初期状態中の粒子が散乱を受けずにそのまま終状態中に現れる場合にのみ効く因子である。

(15) の経路積分部分は，$Z[J]$ の表式で J_i を $\varphi_i\vec{K}_i$ に置き換えるだけであるから，$S[\varphi]$ に対する Feynman 計算規則も $Z[J]$ のそれからすぐ読み取れる。$Z[J]$ に対する運動量表示 ($\tilde{J}(p)\equiv\int d^4x\,e^{ipx}J(x)$) での展開式

$$Z[J]=\sum\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left(\int\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\right)i\tilde{J}_{i_1}(-p_1)\cdots i\tilde{J}_{i_n}(-p_n)$$
$$\times\tilde{G}^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(p_1\cdots p_n)i(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n) \tag{16}$$

[4-3 (36) 参照] を思い起こし，$\tilde{G}^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(p_1\cdots p_n)$ に対する Feynman 則 4-3 (38) において外線 J_i には必ず $i^{-1}(\mu_j^2-p_j^2-i\epsilon)^{-1}$ の伝播関数因子がついていたことに注意する。そうすれば，(16) の $i\tilde{J}_j(-p_j)$ を $\widetilde{\varphi_j iK_j}(-p_j)=\tilde{\varphi}_j(-p_j)i(\mu_j^2-p_j^2)$ に置き換えることは，ちょうど $\tilde{G}^{(n)}$ のすべての外線で伝播関数因子をキャンセルして単に $\tilde{\varphi}_j(-p_j)$ を付与するのに等しいことがわかる。ここで，$\tilde{\varphi}_i(p)$ は (12) の 4 次元 Fourier 変換

$$\tilde{\varphi}_i(p)=\int d^4x\,e^{ipx}\varphi_i(x)$$
$$=\frac{(2\pi)^4[\delta(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}}^i)\varphi_i(\boldsymbol{p})+\delta(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}}^i)\varphi_i^*(-\boldsymbol{p})]}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}^i}} \tag{17}$$
$$(\omega_{\boldsymbol{p}}^i\equiv\sqrt{\boldsymbol{p}^2+\mu_i^2})$$

である。x-空間での表示では Green 関数 $G^{(n)}$ の外線の伝播関数 Δ_F を (12) の $\varphi_i(x)$ で置き換えることになるが，この規則は**有効作用 $\Gamma[\varphi]$ の計算規則と同じ**であることに注意しておこう。ただ $S[\varphi]$ と $\Gamma[\varphi]$ で異なるのは，

$\Gamma[\varphi]$ の場合は 1 粒子既約なグラフのみだが $S[\varphi]$ は (真空泡グラフ以外の) すべてのグラフが効くという点と，$S[\varphi]$ の φ_i は $(\Box+\mu_i^2)\varphi_i=0$ を満たす質量殻上の関数であるのに対し $\Gamma[\varphi]$ の φ_i は一般の 4 次元関数であるという点の二点である。

不変散乱振幅　1 粒子の生成・消滅演算子として，(2) の $a_i(\boldsymbol{k})$, $a_i^\dagger(\boldsymbol{k})$ の代わりに

$$A_i(\boldsymbol{k})=\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}\,a_i(\boldsymbol{k}), \qquad A_i^\dagger(\boldsymbol{k})=\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}\,a_i^\dagger(\boldsymbol{k}) \tag{18}$$

を定義すれば，例えば，その 1 粒子状態 $|i, \boldsymbol{k}\rangle=A_i^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$ は，規格化

$$\langle i, \boldsymbol{k}|j, \boldsymbol{q}\rangle=(2\pi)^3 2k_0\,\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\,\delta_{ij} \tag{19}$$

を満たす。$k_0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})$ は Lorentz 不変であるので，$A_i^\dagger(\boldsymbol{k})$, $A_i(\boldsymbol{k})$ を不変規格化 (invariant normalization) された生成・消滅演算子，それでつくられた状態

$$|i_1, \boldsymbol{k}_1;\cdots;i_n, \boldsymbol{k}_n\rangle=A_{i_1}^\dagger(\boldsymbol{k}_1)\cdots A_{i_n}^\dagger(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle \tag{20}$$

を不変規格化された状態と呼ぶ。

さて，S 行列演算子 S の行列要素は，一般にエネルギー・運動量保存を満たすから

$$\langle\beta|S|\alpha\rangle=i(2\pi)^4\,\delta^4(p_\alpha-p_\beta)\,\mathfrak{M}_{\beta\alpha} \tag{21}$$

の形をとり，特に初期・終状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ を (20) のような不変規格化された状態にとったとき，遷移振幅 $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ を**不変散乱振幅**と呼ぶ。

$a_i^\dagger(\boldsymbol{k})$ でつくられた状態の散乱振幅は，上述の $S[\varphi]$ を汎関数微分 $\delta/\delta\varphi_i(\boldsymbol{k})$ をすれば得られるから，$S[\varphi]$ に効く Feynman グラフの外線の因子 $\tilde{\varphi}_i(p)$, (17), を $\varphi_i(\boldsymbol{k})$ で微分して $(2\pi)^4\,\delta^4(p-k)/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}$ の因子に置き換えることになる。$(2\pi)^4\,\delta^4(p-k)$ の因子は (16) の $d^4p/(2\pi)^4$ 積分でちょうど (外線運動量 p^μ を質量殻上の運動量 $k^\mu=(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu_i^2}, \boldsymbol{k})$ におく効果以外は) 消えるので，外線には単に $1/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}$ の因子を付ければよいことになる。ところが不変散乱振幅 $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ の場合は，$A_i^\dagger(\boldsymbol{k})=\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}\,a_i^\dagger(\boldsymbol{k})$ でつくられる状態なので，この因子もなくなり，外線因子は 1 となる。同様な考察を Dirac 場や後出のベクトル場に対しても行うと，次の Feynman 規則が得られる：

不変散乱振幅 $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ を得る Feynman 規則

i)　運動量 $p=(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}, \boldsymbol{p})$ の
スカラー場の外線には 1,
Dirac 場の外線には,
粒子：初期状態の場合 $u(\boldsymbol{p}, s)$, 終状態の場合 $\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)$,
反粒子：初期状態の場合 $\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)$, 終状態の場合 $v(\boldsymbol{p}, s)$,
ベクトル場の外線には　　(22)
初期状態の場合 $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})$, 終状態の場合 $\varepsilon_\mu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{k})$,
の因子を，それぞれ付与する。[ベクトル場の偏極ベクトル $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})$ の定義は **5-6** で与える。]

ii)　内線の伝播関数，頂点因子，ループ積分，符号・統計因子に関しては，運動量表示の Green 関数 $\widetilde{G}^{(n)}$ に関する **4-3** (38), **4-4** (46) で与えた規則と同じ。

運動量表示の Green 関数 $\widetilde{G}^{(n)}$ の定義のときに全運動量の保存因子 $i(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)$ をくくり出したのに対応して，不変振幅 $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ の定義 (21) もそうなっていることに注意したい。

散乱断面積　初期状態が 2 粒子の場合の散乱過程

$$1+2 \longrightarrow 3+4+\cdots+n \tag{23}$$

を考える。粒子 i の 4 次元運動量を $p_i^\mu=(\sqrt{\boldsymbol{p}_i^2+m_i^2},\ \boldsymbol{p}_i)$ とする。個数密度 (単位体積当りの粒子数) が ρ_1, ρ_2 である粒子 1 と粒子 2 (のビーム) を "相対速度" $\bar{v}_{\mathrm{rel}}$ で衝突させたとき，(23) の散乱過程が，時間 T，体積 V の中で，N 回起こったとする。この過程 (23) の断面積 (cross section) σ は

$$N=VT\rho_1\rho_2\,\bar{v}_{\mathrm{rel}}\,\sigma \tag{24}$$

で定義される。終状態の粒子 3 〜 n の運動量の範囲をある微小領域 $d\Omega$ に限ったときの (23) の過程が dN 回起こったとすると，(24) の N と σ をそれぞれ dN と $d\sigma$ で置き換え，$d\sigma/d\Omega$ を微分断面積と呼ぶ。

引用符つきで "相対速度" と呼んだ $\bar{v}_{\mathrm{rel}}$ の定義は，一般の Lorentz 系で

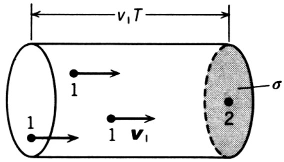
$$\bar{v}_{\mathrm{rel}}\equiv\frac{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}{p_1^0p_2^0} \tag{25}$$

で与えるものとする。これが実際の相対速度

$$v_{\mathrm{rel}}=|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|=\left|\frac{\boldsymbol{p}_1}{p_1^0}-\frac{\boldsymbol{p}_2}{p_2^0}\right| \tag{26}$$

と一致するのは粒子 1, 2 の速度ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が平行 $\boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$ (反平行や $\boldsymbol{v}_1=0$ または $\boldsymbol{v}_2=0$ も含む) になるような Lorentz 系でのみであることに注意しておこう。とにかく，(25) から明らかな点は $p_1^0p_2^0\bar{v}_{\mathrm{rel}}$ が Lorentz 不変

量であることである。ところが一方，粒子数密度 ρ は 4 元粒子数カレント $j^\mu=(\rho, \rho\boldsymbol{v})$ の時間成分 j^0 であり，$j^\mu/\rho=(1, \boldsymbol{v})=p^\mu/p^0$ であるから，ρ/p^0 も Lorentz 不変，したがって，$\rho_1\rho_2\bar{v}_{\rm rel}$ も Lorentz 不変，よって (24) で定義される断面積 σ も Lorentz 不変量である。



4・24 図

(24) で定義される σ が断面積と呼ばれる理由は，例えば粒子 2 が静止している $p_2=(m_2, \boldsymbol{0})$ の実験室系で考えるのがわかりやすい。4・24 図に示すように，1 個の標的粒子 2 が断面積 σ の広がりを持つとすると，それに対し相対速度 $|\boldsymbol{v}_1|=\bar{v}_{\rm rel}$ で入射してくる粒子 1 のビームのうち，時間 T の間には，図の長さ $\bar{v}_{\rm rel}T$，断面積 σ の円筒に入っているものは必ずぶつかるから，その中の粒子 1 の個数 $\rho_1\bar{v}_{\rm rel}T\sigma$ だけ散乱が起こることになる。標的粒子 2 は体積 V 中に ρ_2V 個存在するので，時間 T，体積 V 中の全散乱回数 N は $\rho_2V\cdot\rho_1\bar{v}_{\rm rel}T\sigma$ となり (24) と一致する。

さて，初期状態 $|\alpha\rangle=|i_1, \boldsymbol{p}_1;\ i_2, \boldsymbol{p}_2\rangle$ と終状態 $|\beta\rangle=|i_3, \boldsymbol{p}_3;\ \cdots;\ i_n, \boldsymbol{p}_n\rangle$ を (20) の形の不変規格化された平面波の状態にとるとする。すると，1 粒子状態の内積は (19) の規格化より

$$\begin{aligned}\langle i, \boldsymbol{p}|i, \boldsymbol{p}\rangle&=2p^0(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{0})\\&=2p^0\int d^3x\, e^{i\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x}}\end{aligned}\tag{27}$$

であるから，単位体積当り $2p^0$ 個の粒子が (無限大の) 体積 $[\int d^3x]\equiv V$ の全空間に一様に存在している状態に対応し，粒子 1, 2 の密度 ρ_1, ρ_2 は $2p_1^0$, $2p_2^0$ で与えられることになる。次に，不変規格化の場合の 1 粒子状態セクターでの完全性関係式が，(19) より

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}|i, \boldsymbol{p}\rangle\langle i, \boldsymbol{p}|=1\tag{28}$$

となることに注意する。これに対応して，終状態の粒子 3, $\cdots$, n の運動量の値が $(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{p}_j+d\boldsymbol{p}_j)$ $(j=3, \cdots, n)$ の微小区間に入る $(n-2)$ 粒子状態部分空間への射影演算子は

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}^{(n-2)}(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{p}_j+d\boldsymbol{p}_j)\\&\quad=\prod_{j=3}^{n}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}|i_3, \boldsymbol{p}_3;\ \cdots;\ i_n, \boldsymbol{p}_n\rangle\langle i_n, \boldsymbol{p}_n;\ \cdots;\ i_3, \boldsymbol{p}_3|\end{aligned}\tag{29}$$

で与えられる。それゆえ，最初 $|\alpha\rangle$ にあった状態は，無限大の時間 T (=

$\int dt=(2\pi)\delta(0)$ の経過の後 $S|\alpha\rangle$ となっているので，それがこの部分空間内の状態になっている確率は

$$\langle\alpha|S^{\dagger}\mathcal{P}^{(n-2)}(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{p}_j+d\boldsymbol{p}_j)S|\alpha\rangle=\prod_{j=3}^{n}\left(\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right)|\langle\beta|S|\alpha\rangle|^2 \qquad (30)$$

で与えられることになる。この量 (30) は，(23) の散乱過程（で終状態の運動量が区間 $(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_i+d\boldsymbol{p}_i)$ に入っているもの）が起こっている回数 dN を与える。右辺に不変振幅の定義式 (21) を代入し，

$$|(2\pi)^4\delta^4(p_\alpha-p_\beta)|^2=(2\pi)^4\delta^4(0)\cdot(2\pi)^4\delta^4(p_\alpha-p_\beta) \qquad (31)$$

で $(2\pi)^4\delta^4(0)$ の因子が散乱の起こっている全時空体積 $VT=\int d^4x$ を表していることを用いれば，

$$dN=VT\cdot\prod_{j=3}^{n}\left(\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right)(2\pi)^4\delta^4(p_\beta-p_\alpha)|\mathfrak{M}_{\beta\alpha}|^2 \qquad (32)$$

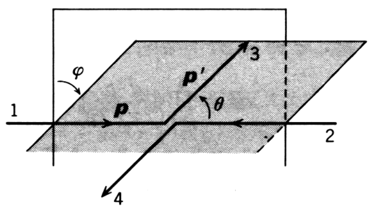
となる。ここで，(24) の断面積の定義と比較し，上で注意した $\rho_1=2p_1^0$，$\rho_2=2p_2^0$ および $\bar{v}_{\rm rel}$ の表式 (25) を用いると，(23) の散乱過程の微分断面積が結局

$$d\sigma=\prod_{j=3}^{n}\left(\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}\right)\cdot\frac{|\mathfrak{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}(2\pi)^4\delta^4(p_3+\cdots+p_n-p_1-p_2) \qquad (33)$$

で与えられることがわかる。

特に，終状態も 2 粒子の場合にはさらに簡単化できる。重心系で考察することにし，$\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2\equiv\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}_3=-\boldsymbol{p}_4\equiv\boldsymbol{p}'$ をそれぞれ始，終状態の運動量とする (4・25 図参照)。この場合，(33) の δ 関数

$$\delta^3(\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\times\delta(p_3^0+p_4^0-p_1^0-p_2^0) \qquad (34)$$



4・25 図

のうち，初めの 3 次元 δ 関数は d^3p_4 で落とす。$(p_i^0)^2=\boldsymbol{p}_i^2+m_i^2$ から従う $|\boldsymbol{p}'|d|\boldsymbol{p}'|=p_3^0dp_3^0=p_4^0dp_4^0$ を用いて

$$d^3p_3=|\boldsymbol{p}'|^2d|\boldsymbol{p}'|d\Omega=|\boldsymbol{p}'|\frac{p_3^0p_4^0d(p_3^0+p_4^0)}{p_3^0+p_4^0}d\Omega \quad (d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi) \qquad (35)$$

が得られるから，(34) の残りの一つの δ 関数を $d(p_3^0+p_4^0)$ 積分で落とし，

(25)=(26) を用いれば，(33) は

$$d\sigma = d\Omega \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\boldsymbol{p}'|}{(p_1^0+p_2^0)^2 |\boldsymbol{p}|} |\mathfrak{M}_{\beta\alpha}|^2 \tag{36}$$

となる。

(36) はもっと明白に Lorentz 不変な形に書き直すこともできる。次の二つの不変量

$$s \equiv (p_1+p_2)^2, \qquad t \equiv (p_3-p_1)^2 \tag{37}$$

を導入すれば，重心系での量に対し

$$d\Omega = d\varphi\, d(-t)/2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'| \tag{38}$$

$$\begin{aligned}(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 &= |\boldsymbol{p}|^2 (p_1^0+p_2^0)^2 \\ &= \frac{1}{4}[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]\end{aligned} \tag{39}$$

が容易に示せるから，

$$\frac{d\sigma}{d(-t)} = \frac{|\mathfrak{M}_{\beta\alpha}|^2}{64\pi[(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]} \frac{d\varphi}{2\pi} \tag{40}$$

を得る。

崩壊確率 初期状態 $|\alpha\rangle$ が質量 M の静止した 1 粒子状態である場合を考えると，(30) は全時空 VT でその 1 粒子状態が $|\beta\rangle$ に崩壊する回数 dN を与える。不変規格化された $|\alpha\rangle$ は，粒子 M が全空間に $2p_0V=2MV$ 個分布している状態に対応するから，粒子 1 個当り単位時間当り，崩壊

$$M \longrightarrow 1+2+\cdots+n$$

が起こる確率 $d\Gamma \equiv dN/TV2M$ は

$$d\Gamma = \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0} \frac{|\mathfrak{M}_{\beta\alpha}|^2}{2M} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+\cdots+p_n-M) \tag{41}$$

で与えられることになる。δ 関数の中の M は崩壊粒子 M の 4 元運動量 $(M, \boldsymbol{0})$ を表す。

この場合も，終状態が 2 粒子のときはもっと簡単になる。粒子 M の静止系では，生成された粒子 1, 2 の運動量は $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$, エネルギーは $p_1^0+p_2^0=M$ を満たすから，上の (34), (35) と同様にして

$$d\Gamma = \frac{|\boldsymbol{p}|}{8\pi M^2} |\mathfrak{M}_{\beta\alpha}|^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \tag{42}$$

を得る。前の断面積でも，今の崩壊確率でも，終状態 $|\beta\rangle$ に同種粒子が入っている場合は，全断面積，全崩壊確率を求めるとき，注意が必要である；終状態に含まれる同種粒子の個数を $n_1, n_2, \cdots$ としたとき，全断面積，全

崩壊確率は，積分$\int \prod d^3\boldsymbol{p}_j/(2\pi)^3 2p_j^0$を行った後$(n_1!n_2!\cdots)^{-1}$を掛けなければならない。これは，同一粒子を入れ換えて得られる同じ終状態からの寄与を$n_k!$回重複して数えていることになるからである。崩壊確率$d\Gamma$をあらゆる可能な終状態について足し上げたものΓを粒子Mの全幅(total width)，その逆数$\tau \equiv \Gamma^{-1}$をMの寿命(life time)と呼ぶ。一方，特定の終状態Fに限定して，F中の粒子の運動量積分を行って得られる幅$\Gamma(M\to F)$を，粒子MのチャネルFに対応した部分幅(partial width)，その全幅Γに対する比$B(M\to F)\equiv \Gamma(M\to F)/\Gamma$を分岐比(branching ratio)と呼ぶ。

演習問題 4.

4.1　4-1 (19) の Weyl 逆変換によりc数の$H(p,q)$から作られる演算子$\boldsymbol{H}$に対し，実際 Weyl 変換 4-1 (18) を施せばもとの$H(p,q)$が再現することを確かめよ。また，4-1 (19) の$\varDelta(p,q)$に対する3表式の等しいことを証明せよ。さらに$\exp(\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q})$の Weyl 変換が$\exp(\alpha p+\beta q)$となることも示せ。

4.2　古典論の段階で Hamiltonian が 4-1 (30)，$H=\frac{1}{2}g^{ab}(q)p_a p_b$で与えられる系に対し，もし，座標変数$q^a(a=1,2,\cdots,n)$の一般座標変換に対する不変性を量子論においても要求すれば，量子系の Hamiltonian $\boldsymbol{H}$を

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}g^{-\frac{1}{4}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}_a g^{ab}(\boldsymbol{q})\sqrt{g(\boldsymbol{q})}\boldsymbol{p}_b g^{-\frac{1}{4}}(\boldsymbol{q}) \qquad (g(\boldsymbol{q})\equiv \det g_{ab}(\boldsymbol{q}))$$

ととるべきであることを，以下の順に示せ。

1）q_aの一般座標変換の下で，q-表示の波動関数$\psi(q)$を不変（スカラー）としたとき， Schrödinger 方程式$i\partial_t\psi(q)=\hat{H}(\hat{p}=-i\partial/\partial q, q)\psi(q)$も不変にするためには，$q$-表示の量子系 Hamiltonian $\hat{H}$を次のようにとるべきであることを示せ：

$$\hat{H}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g(q)}}\frac{\partial}{\partial q^a}g^{ab}(q)\sqrt{g(q)}\frac{\partial}{\partial q^b}$$

2）一方，一般座標変換で不変な内積が$\langle\psi_1|\psi_2\rangle=\int d^n q\ \sqrt{g(q)}\,\psi_1^*(q)\psi_2(q)$で与えられることを確かめ，この内積の下で hermite な運動量演算子$\boldsymbol{p}_a$のq-表示$\hat{p}_a$は

$$\hat{p}_a=-ig^{-\frac{1}{4}}(q)\frac{\partial}{\partial q^a}g^{\frac{1}{4}}(q)$$

でなければならないことを示せ。これを用いて，q-表示の Hamiltonian $\hat{H}$を，表示によらない形に書き直せば，初めに与えた$\boldsymbol{H}$の形が得られる。

4.3 複素スカラー場の $\lambda\phi^4$ 模型で，質量項が通常と逆符号で入っている系

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi+\mu^2\varphi^*\varphi-\frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2 \qquad (\mu^2>0)$$

は，Goldstone 模型と呼ばれる (**6-2** 参照)。

1) この系の tree レベルの有効ポテンシャル V の極小条件より，φ が 0 でない真空期待値を得ることを示し，その大きさを答えよ。

2) ところが，φ の真空期待値 $\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|0\rangle$ に対する経路積分表式

$$\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|0\rangle=N\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi^*\ \varphi(x)\exp\left(i\int dx\mathcal{L}\right)$$

において，φ の無限小 $U(1)$ 位相変換 $\varphi'(x)=\varphi(x)+i\theta\varphi(x)$, $\varphi^{*\prime}(x)=(\varphi'(x))^*$ と同じ形の積分変数変換 $\varphi\to\varphi'$, $\varphi^*\to\varphi^{*\prime}$ を行えば，積分の変数変換不変性および $\mathcal{L}$ の $U(1)$ 不変性から

$$\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|0\rangle=(1+i\theta)\langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|0\rangle \longrightarrow \langle 0|\boldsymbol{\varphi}(x)|0\rangle=0$$

が導かれることを示せ。

3) この 1) と 2) の矛盾は，**4-2** (28) の $-i\epsilon$ 処法に従って $\mathcal{L}$ が実は

$$\mathcal{L}+i\epsilon(\varphi(x)-\langle\varphi\rangle)^*(\varphi(x)-\langle\varphi\rangle)$$

に置き換えられており，ϵ 比例項が $U(1)$ 不変性を破っていることを考慮すれば救われる。このことを確かめよ。

4.4 ボソン場の熱平衡系に関し次の問に答えよ。

1) 温度 Green 関数の生成汎関数 $Z_\beta[J]$ の経路積分表式 **4-2** (45) が，摂動展開の基礎を与える次の形に書き直せることを示せ：

$$Z_\beta[J]=N'(\beta)\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\cdot D_\beta\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\exp\int_0^\beta d\tau\int d^3x\left[\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)+J\phi\right]\Big|_{\phi=0}.$$

ただし，温度伝播関数と呼ばれる $D_\beta(\vec{x}-\vec{y},\tau_x-\tau_y)$ は

$$(-\partial_{\tau_x}^2-\nabla_x^2+m^2)D_\beta(\vec{x}-\vec{y},\tau_x-\tau_y)=\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta(\tau_x-\tau_y),$$

$$\longrightarrow D_\beta(\vec{x},\tau)=\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\omega_n\tau+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\frac{1}{\omega_n^2+\vec{k}^2+\mu^2} \qquad (\omega_n\equiv 2\pi n/\beta)$$

で定義され，温度依存規格化因子 $N'(\beta)$ は次式で与えられる。

$$N'(\beta)=\exp\left[\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{-\ln\beta-\frac{1}{2}\ln(\omega_n^2+\vec{k}^2+\mu^2)\right\}\right]$$

2) 自由場 ($\mathcal{L}_{\rm int}=0$) のときの分配関数 $Z_{自由}=Z_\beta[J=0]_{\mathcal{L}_{\rm int}=0}$ は $N'(\beta)$ で与えられる。$N'(\beta)$ を評価して次式が得られることを示せ：

$$Z_{自由}=\exp\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\beta\frac{E}{2}-\ln(e^{\beta E}-1)\right] \qquad (E\equiv\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}).$$

この指数部を $\beta=\int_0^\beta d\tau$ で割ったものが，よく知られた理想 Bose 気体の自由エネルギーであることを見ておくとよい。

4.5 **4-3** (21) の右辺の各項が重み 1 で現れる理由を考えよ。また，**4-5** 図 (b)～(d) のグラフの統計因子が **4-3** (25)～(28) で与えたものになることを示せ。

4.6 フェルミオン場の有限温度系の場合，**4-4** (36) のトレース公式，および

遷移振幅公式 **4-4** (42) (の虚時間の場合の対応物) を用いて

$$\mathrm{tr}\, e^{-\beta \boldsymbol{H}} = \lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\left(\prod_{j=1}^{N} d\psi_j^* d\psi_j\right) e^{\psi_0^\dagger\psi_0}\, e^{+\psi_0^\dagger\psi_N}$$
$$\times\exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} -\psi_{j+1}^\dagger(\psi_{j+1}-\psi_j) - \varDelta\tau H(\psi_{j+1}^*, \psi_j\,;\,-i\tau_j)\right]$$

となることを導け。ただし，$e^{\psi_0^\dagger\psi_0}$ 因子はトレース公式より，また，$e^{\psi_0^\dagger\psi_N}$ 因子は $\langle\psi_0, -i\beta\,|\,\psi_N, -i\tau_N\rangle$ よりきたものである。この二つの因子の積は $\exp[-\psi_0^\dagger\{(-\psi_0)-\psi_N\}]$ と書け，これを被積分関数指数部にあるべき $j=N$ 番目の運動項 $-\psi_0^\dagger(\psi_{N+1}-\psi_N)$ とみなせば $\psi_{N+1}=-\psi_0$，すなわち ψ の反周期性が従う。$\psi^\dagger$ の反周期性も同じような理由付けができることを示せ。

4.7　Heisenberg 表示で書かれた **4-5** (1) が，$J(x)$ が時間 t に依存しない $J(\vec{x})$ の場合，Schrödinger 表示に移って **4-5** (21) の形になることを証明せよ。

4.8　A を $n\times n$ の，B を $m\times m$ の通常の (Grassmann 偶の) 行列，$\varDelta$ を $n\times m$ の，$\varGamma$ を $m\times n$ の Grassmann 奇の (すなわち，Grassmann 数を要素とする) 行列として，次の $(n+m)\times(n+m)$ 行列

$$M = \begin{array}{c} \\ n \\ m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & \varDelta \\ \varGamma & B \end{pmatrix} \end{array}$$

を構成する。この型の行列 M の，超トレース (supertrace) str M および超行列式 (superdeterminant) sdet M を次式で定義する：

$$\mathrm{str}\, M \equiv \mathrm{tr}\, A - \mathrm{tr}\, B,$$
$$\mathrm{sdet}\, M \equiv \exp[\mathrm{str}(\ln M)]$$

1)　このとき，次の公式が成立することを示せ：

$\mathrm{str}\,(M_1M_2) = \mathrm{str}\,(M_2M_1)$

$\mathrm{sdet}\,(M_1M_2) = \mathrm{sdet}\, M_1\cdot\mathrm{sdet}\, M_2$　　(ヒント：付録 D の (8) の公式を使え)

$\mathrm{sdet}\, M = \det A/\det(B-\varGamma A^{-1}\varDelta)$
$\quad = \det(A-\varDelta B^{-1}\varGamma)/\det B$　　(ヒント：付録 D の (6) の分解を使え)

2)　$\phi=(\phi_i)$ を n 成分実変数，$\xi=(\xi_i)$ を m 成分 (実) Grassmann 数として，次の二次形式 Q を考える：

$$Q \equiv \frac{1}{2}\phi^T A\phi + \phi^T\varDelta\xi + \frac{1}{2}\xi^T B\xi \equiv \frac{1}{2}\varPhi^T M\varPhi.$$

ただし，$\varPhi^T\equiv(\phi^T, \xi^T)$ であり，M は上の型の行列で “対称” 性，$A^T=A$，$B^T=-B$，$\varGamma=-\varDelta^T$，を満たすものである。次の Gauss 積分公式を示せ：

$$\int\frac{d^n\phi}{(2\pi)^{n/2}}d^m\xi\; e^{-Q} \equiv \int d^{n+m}\varPhi\; e^{-\frac{1}{2}\varPhi^T M\varPhi} = (\mathrm{sdet}\, M)^{-\frac{1}{2}}.$$

4.9　4-6 (25) の $\bar{v}_{\mathrm{rel}}$ が，$\boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$ となる Lorentz 系で (のみ)，実際の相対速度 $|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|$ に一致することを示せ。

4.10　$\pi^\pm$ 中間子のレプトン $l^\pm$ (l：電子 e または μ 粒子) とニュートリノ ν_l への崩壊

$$\pi^- \longrightarrow l^- + \bar{\nu}_l, \qquad \pi^+ \longrightarrow l^+ + \nu_l$$

は，弱い相互作用 (6-7 参照)

$$\mathcal{L}_{\rm int}=-\frac{G}{\sqrt{2}}(J_\mu^\dagger j^\mu+j_\mu^\dagger J^\mu), \qquad j_\mu\equiv \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_{\rm e}+\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu$$

により引き起こされる。ただし，j_μ の中の e，μ，$\nu_{\rm e}$，ν_μ は対応する粒子の Dirac 場を表す。J_μ は，l, ν_l と無関係なハドロン・カレント演算子で，Lorentz 不変性より，真空 $|0\rangle$ と不変規格化された π 中間子状態 $|\pi^-\rangle$ の間で

$$\langle 0|J_\mu^\dagger(x)|\pi^-(k)\rangle=ik_\mu\sqrt{2}f_\pi\cos\theta_{\rm C}e^{-ikx}$$

の形の行列要素を持つ。f_π は π 中間子の崩壊定数，$\theta_{\rm C}$ は Cabibbo 角と呼ばれる。このとき，弱い相互作用 $\mathcal{L}_{\rm int}$ の 1 次の摂動で，$\pi^-\to l^-+\bar{\nu}_l$ の崩壊の部分幅を計算せよ。また，$\pi^-\to e+\bar{\nu}_e$ と $\pi^-\to\mu+\bar{\nu}_\mu$ を比べると圧倒的に $\mu+\bar{\nu}_\mu$ へ崩壊する方が多い。その理由を考えよ。(π, e, μ の質量は $m_\pi\simeq 140\text{MeV}$，$m_e\simeq 0.511$ MeV，$m_\mu\simeq 106$ MeV.) さらに，π^- の崩壊は $l+\bar{\nu}_l$ がほぼ 100 %であること，および Fermi 結合定数 G，Cabibbo 角 $\theta_{\rm C}$ の実験値 $G\simeq 1.17\times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$，$\theta_{\rm C}\simeq 0.23$ を用い，π^- の崩壊幅 $\Gamma=1/\tau\simeq 3.84\times 10^7\text{sec}^{-1}$ のデータより崩壊定数 f_π の値を決定せよ。

5. ゲージ場の量子論

5-1 局所ゲージ不変性

内部対称性と群 例えば，Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi \tag{1}$$

は，1 章で述べたように，$U(1)$ 位相変換

$$\psi'(x)=e^{i\theta}\psi(x) \tag{2}$$

(およびその複素共役の式) の下で不変であった。ところが，もし Dirac 場が 1 種類ではなく N 種類 $\psi_1,\cdots,\psi_N$ あって，(1) の ψ が N 成分ベクトル

$$\psi=(\psi_i)=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix},\qquad \bar{\psi}=(\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\cdots,\bar{\psi}_N) \tag{3}$$

であるとすると，(1) の $\mathcal{L}$ は，単に (2) のようなすべての場の位相を一斉に回す変換の下で不変であるだけではなく，一般の $N\times N$ ユニタリー行列 U による N 成分の場の間の回転

$$\psi'_i(x)=U_i{}^j\,\psi_j(x)=[\exp(i\theta^a T_a)]_i{}^j\,\psi_j(x) \tag{4}$$

の下で不変となる。一般に，$\mathcal{L}$ (または作用積分) を不変に保つ変換を二つ続けて行ってもまた $\mathcal{L}$ は不変にとどまるから，系の対称性の変換は群をなす。(4) の変換は，$N\times N$ ユニタリー行列のなす群なので $U(N)$ 群と呼ばれる。(4) で θ^a は実の変換パラメータであり，T_a は無限小変換の生成子 (generator) と呼ばれる。$U=\exp(i\theta^a T_a)$ が一般の $N\times N$ ユニタリー行列であるから，T_a は一般の $N\times N$ エルミート行列であることがわかる。そのような生成子 T_a は (したがって実パラメータ θ^a も) 独立なものが N^2

個ある。一般に群 G の独立な生成子の個数を群の次元，$\dim G$，と呼ぶので，$\dim U(N)=N^2$ ということである。

慣例に従って T_a の規格直交化を

$$\mathrm{tr}(T_a T_b)=\frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{5}$$

ととることにすると，$N=2$ のとき，すなわち $U(2)$ の生成子 T_a は，よく知られた Pauli 行列 σ_a (の 1/2 倍)

$$T_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad T_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad T_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{6}$$

と，単位行列 $\mathbf{1}$ に比例した $T_0=(1/2)\mathbf{1}$，の四つである。$N=3$ の $U(3)$ の生成子は，通常，Gell-Mann (ゲルマン) 行列と呼ばれる 8 個の 3×3 行列

$$\lambda_a=\begin{pmatrix}\sigma_a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad a=1,2,3$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\qquad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

の 1/2 倍，$T_a=(1/2)\lambda_a$ と，単位行列に比例した $T_0=(1/\sqrt{6})\mathbf{1}$，をとる。一般の $U(N)$ の場合の，(5) の意味で規格直交化された生成子 T_a のつくり方も明らかであろう。

一般に群 G の部分群 H が，任意の $g\in G$ に対し $gHg^{-1}\subset H$ を満たすとき，H を G の不変部分群と呼ぶ。G が (G 自身と $\{1\}$ 以外に) 不変部分群を持たないとき G を単純群 (simple group)，$U(1)$ の不変部分群を持たないとき半単純群 (semi-simple group) と呼ぶ。半単純群はいくつかの単純群の直積になる。上の $U(N)$ 群の場合は，単位元に比例した生成子 T_0 のつくる変換 $\exp(i\theta^0 T_0)$ は (2) の形の位相変換で $U(1)$ 部分群をなし，明らかに $U(N)$ の中の不変部分群となっている。残りの N^2-1 個の T_0 に直交する生成子は皆トレースが 0 で，それゆえ，それらのつくる元 $\exp\left(i\sum_{a=1}^{N^2-1}\theta^a T_a\right)$ は行列式が 1 の特殊ユニタリー群 $SU(N)$ を張る。すなわち，$U(N)$ は，$U(1)$ 群と単純群 $SU(N)$ の直積に分解される：$U(N)\simeq U(1)\times SU(N)$. 上の (6), (7) の Pauli 行列 σ_a，Gell-Mann 行列 λ_a は，それぞれ $SU(2)$，$SU(3)$ の生成子である。

一般に群 G の生成子 T_a は特定の交換関係

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \tag{8}$$

を満たし，係数 f_{abc} は群 G の構造定数 (structure constant) と呼ばれる。$SU(2)$ の $T_a=(1/2)\sigma_a$ の場合は，角運動量代数でよく知られているように，3 階完全反対称テンソル ϵ_{abc} が構造定数である。一般に構造定数は，生成子を (5) のように規格直交化しておくと，

$$if_{abc} = 2\,\mathrm{tr}([T_a, T_b]T_c) \tag{9}$$

と書けるから，トレースの巡回対称性を使って，三つの添字 abc に関して完全反対称であることがわかる†。(3) の N 成分の ψ は $SU(N)$ の N 次元基本表現 (fundamental representation) あるいは定義表現 (defining repr.) と呼ばれ，Pauli 行列や Gell-Mann 行列 (の 1/2 倍) はその場合の T_a の表現行列で，それら具体的行列から構造定数 f_{abc} を (8) から計算することができる。が，実は構造定数自体は，群 G 自身の掛算則から決まっているので，どのような表現の上で計算しても同じである。具体的な表現を離れて，抽象的に，生成子 T_a を基底とする $X=i\theta^a T_a$ の形の元は $\dim G$ 次元線形空間を張るが，交換子 $[X, Y]$ の意味の掛算も定義されるので環 (ring) をなす。これを群 G に対応する Lie (リー) 環あるいは Lie 代数 (Lie algebra) と呼び $\mathcal{G}$ で表す。この意味で，Pauli 行列，Gell-Mann 行列は，(8) を満たす Lie 代数の基底 T_a の，基本表現における具体的行列表現を与えているわけである。生成子 T_a の表現行列が与えられれば，その指数関数 $\exp(i\theta^a T_a)$ が (少なくとも単位元近傍 $|\theta|\ll 1$ では) もとの Lie 群 G の表現を与える。

基本表現以外に重要な表現として随伴表現 (adjoint repr.) と呼ばれるものがある。これは，$\dim G$ 次元の表現で，生成子 T_a の表現行列が

$$(T_a)_b{}^c = if_{bac} \equiv [\mathrm{ad}(T_a)]_b{}^c \tag{10}$$

で与えられるものである。実際，Jacobi (ヤコビ) 恒等式と呼ばれる

$$[T_a,[T_b, T_c]]+[T_b,[T_c, T_a]]+[T_c,[T_a, T_b]]=0 \tag{11}$$

が，**任意の行列** T_a の交換子に対して恒等的に成立するので，これに (8) の関係式を代入すれば，構造定数に対して

† 実は，Killing (キリング) 形式と呼ばれる "内積" $\mathrm{tr}(T_aT_b)$ が (5) のように正定値であるのは群 G がコンパクト (compact) の場合だけである。我々は内部対称性としてはコンパクト群しか扱わない。

$$f_{bcd}f_{ade}+f_{cad}f_{bde}+f_{abd}f_{cde}=0 \tag{12}$$

の恒等式が成立せねばならないことが従う。ところが，この (12) は (10) で定義される $\dim G\times\dim G$ の行列自身が (8) の交換関係を満たすこと，すなわち Lie 代数の一つの表現であること，を示している。

随伴表現 (10) の表現ベクトルは，したがって，生成子 T_a と同一の添字を持つ量 $\phi_a(a=1,2,\cdots,\dim G)$ で，群 G の変換で

$$\phi'_b=\exp[i\theta^a\mathrm{ad}(T_a)]_b{}^c\phi_c \tag{13}$$

と変換する。この書き方は，$\dim G$ 個の ϕ_a を縦に並べた"ベクトル表示"であるが，"行列記法"と呼ばれる表示もしばしば用いられる。それは生成子 T_a の任意の表現行列 $(T_a)_i{}^j$ を持ってきて，ベクトル ϕ_a の代わりに†

$$(\phi)_i{}^j=\sum_{a=1}^{\dim G}\phi^a(T_a)_i{}^j \tag{14}$$

なる行列 ϕ を用いるのである。$G=SU(N)$ の場合によく用いられるのは上の (3) で述べた基本表現の $(T_a)_i{}^j$ で，その場合 (14) の ϕ は $N\times N$ 行列となっている。行列記法の ϕ を用いれば，(13) の変換は，等価に

$$\phi'=U\phi U^\dagger,\qquad U_i{}^j=[\exp(i\theta^aT_a)]_i{}^j \tag{15}$$

と書ける。ただし U の中の T_a は (14) に用いた表現行列 $(T_a)_i{}^j$ である。このことは，一般の行列 X, Y に対し

$$\begin{aligned}e^YXe^{-Y}&=X+[Y,X]+\frac{1}{2!}[Y,[Y,X]]+\cdots\\&=[\exp\varDelta_Y]X\qquad(\varDelta_Y\mathcal{O}\equiv[Y,\mathcal{O}])\end{aligned} \tag{16}$$

の等式が成り立つことと，$(T_a)_i{}^j$ が (8) を満たすこと，を使えば明らかであろう。

理論の内部対称性として，上では $U(1)$ や $SU(N)$ の例しか述べなかったが，もちろん種々な群があり得る。例えば，1-4 で述べた N 種の実スカラー場の Lagrangian 密度 1-4 (16) は $O(N)$ 対称性を持っていた。もっとなじみの薄い Lie 群，例えば例外群 E_6, E_7, E_8 など，の対称性を持つ系を構成することもできる。

局所ゲージ変換 考えている系の対称性 G の変換を，系の場を一般に $\varphi_i(x)$ と記して，

$$\begin{aligned}\varphi'_i(x)&=U_i{}^j\varphi_j(x)\\&=[\exp(i\theta^aT_a)]_i{}^j\varphi_j(x),\end{aligned} \tag{17}$$

† 随伴表現ベクトル ϕ_a の添字の上下は区別しない：すなわち $\phi_a=\phi^a$, $T_a=T^a$.

あるいは，単に $\varphi'(x)=U\varphi(x)$ と書こう。簡単のため群 G は単純群と仮定しておく。[ユニタリー表現を考えているので，群 G 自身が $U(N)$ や $SU(N)$ でなくても，G の表現行列 U はユニタリー行列，$(T_a)_i{}^j$ はエルミート行列である。念のため。] さて，ここまでは，変換行列 U，あるいは変換パラメータ θ^a が時空座標 x^μ に依存しないいわゆる "大局的" (global) 変換を考えてきた。しかし **1-6** ですでに強調したように，大局的変換というのは全時空で一斉に内部対称性の座標軸を回すことを意味し不自然に思えるので，むしろ「各時空点で勝手に内部座標軸を設定しても理論は不変であるべし」，というゲージ原理を要求する。すなわち，(17) の変換パラメータ θ^a が時空座標 x の任意の関数 $\theta^a(x)$ である局所的 (local) 変換

$$\varphi'_i(x)=U_i{}^j(x)\varphi_j(x)=[\exp(ig\theta^a(x)T_a)]_i{}^j\varphi_j(x) \tag{18}$$

を行っても理論は不変である，と要求するのである。ここで，後の都合上，θ^a を結合定数 g だけスケールを変えて $g\theta^a$ とした。

この局所不変性を実現するには，$U(1)$ 群の場合の電磁場と同様なゲージ場の導入が必要となる。すなわち，各時空点で勝手な内部座標軸を設定することになるので，ある点 x におけるベクトル $\varphi_i(x)$ を別の点に "平行に移動" するとはどういうことかを指定する必要が生ずる。そこで点 x におけるベクトル $\varphi_i(x)$ を無限小離れた点 $x+dx$ へ平行移動した，**点 $x+dx$ における**ベクトル $\varphi_{/\!/ i}(x+dx)$ を

$$\varphi_{/\!/ i}(x+dx)=\varphi_i(x)+igA_{\mu i}{}^j(x)\varphi_j(x)dx^\mu \tag{19}$$

で定義する。ここに現れる行列 $A_\mu=(A_\mu)_i{}^j$ が，点 x から dx^μ だけ移動したときの内部座標軸の無限小の回転を指定する量で，数学では接続 (connection) 場，物理ではゲージ場，と呼ばれる。座標軸の無限小回転であるから，ゲージ場 $A_\mu(x)$ 自身は Lie 代数 $\mathcal{G}$ の元で生成子 T_a の線形結合

$$A_{\mu i}{}^j(x)=\sum_{a=1}^{\dim G}A_\mu^a(x)(T_a)_i{}^j \tag{20}$$

で与えられる。すなわちゲージ場は群 G の次元の数だけ成分 $A_\mu^a(x)$ を持つ。

(19) の $\varphi_{/\!/}(x+dx)$ が "点 $x+dx$ におけるベクトル" というのは，点 $x+dx$ での変換行列 $U(x+dx)$ で変換する量という意味である。したがって，もともと $x+dx$ にあったベクトル $\varphi(x+dx)$ も，その差

$$\begin{aligned}\varphi(x+dx)-\varphi_{/\!/}(x+dx)&=(\partial_\mu\varphi(x)-igA_\mu(x)\varphi(x))dx^\mu\\&\equiv D_\mu\varphi(x)dx^\mu\end{aligned} \tag{21}$$

も $U(x+dx)$ で変換される共変な量である。すなわち，(21) の両辺で (18) の変換を行い dx の 1 次の量までとれば，

$$(D_\mu\varphi)'(x)=U(x)D_\mu\varphi(x) \tag{22}$$

が従う。(21) で定義される $D_\mu\varphi$ を共変微分と呼ぶ。(22) が任意の場 $\varphi(x)$ の上で成り立つことから，共変微分演算子 $D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu$ が

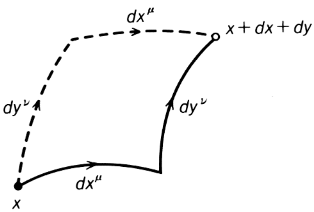
$$D_\mu(x)\longrightarrow D_\mu'(x)=U(x)D_\mu(x)U^{-1}(x) \tag{23}$$

と変換することが従う。それゆえ，ゲージ場は

$$A_\mu(x)\longrightarrow A_\mu'(x)=\frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)+U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) \tag{24}$$

と変換せねばならない。(18) と (24) の変換を合わせて局所ゲージ変換と呼ぶ。

次に，数学で曲率テンソル，物理で場の強さ (field strength) と呼ばれる量を定義しよう。点 x におけるベクトル $\varphi(x)$ を，点 $x+dx+dy$ に平行移動で持っていくのに，5·1 図に示した実線と破線の二つの経路に沿って行い，その差を計算する。まず実線に沿い $x+dx$ に持っていくと (21) を用いて



5·1 図

$$\varphi_{/\!/}(x+dx)=\varphi(x+dx)-D_\mu\varphi(x)dx^\mu. \tag{25}$$

この量 $\varphi_{/\!/}(x+dx)$ をさらに dy だけ平行移動して $x+dx+dy$ へいくと

$$\varphi_{/\!/}{}^{/\!/}(x+dx+dy)=\varphi_{/\!/}(x+dx+dy)-D_\nu\varphi_{/\!/}(x+dx)dy^\nu \tag{26}$$

であるが，下付きの $_{/\!/}$ は x 方向の，上付きの $^{/\!/}$ は y 方向の，平行移動の目印である。ここで，$\varphi_{/\!/}$ に対し (25) を代入すれば

$$\begin{aligned}\varphi_{/\!/}{}^{/\!/}(x+dx+dy)=&\varphi(x+dx+dy)-D_\mu\varphi(x+dy)dx^\mu\\&-D_\nu\varphi(x+dx)dy^\nu+D_\nu D_\mu\varphi(x)dx^\mu dy^\nu\end{aligned} \tag{27}$$

を得る。同じ操作を 5·1 図の破線に沿う平行移動に対して行えば，

$$\begin{aligned}\varphi^{/\!/}{}_{/\!/}(x+dx+dy)=&\varphi(x+dx+dy)-D_\nu\varphi(x+dx)dy^\nu\\&-D_\mu\varphi(x+dy)dx^\mu+D_\mu D_\nu\varphi(x)dx^\mu dy^\nu\end{aligned} \tag{28}$$

を得る。(27) も (28) も共に点 $x+dx+dy$ での共変な量であるから，その差

$$\begin{aligned}\varDelta\varphi(x)&=\varphi^{/\!/}{}_{/\!/}(x+dx+dy)-\varphi_{/\!/}{}^{/\!/}(x+dx+dy)\\&=[D_\mu,D_\nu]\varphi(x)\,dx^\mu dy^\nu\end{aligned} \tag{29}$$

もまたそうであって，$\varphi(x+dx+dy)$ と同様，$(\varDelta\varphi)'(x)=U(x+dx+dy)\varDelta\varphi(x)$ と変換する。しかし，$\varDelta\varphi$ は，dx, dy についてすでに2次の量であるから

$$(\varDelta\varphi)'(x)=U(x)\varDelta\varphi(x) \tag{30}$$

と変換することになる。(29) に現れている交換子

$$F_{\mu\nu}(x)\equiv\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-ig[A_\mu, A_\nu] \tag{31}$$

は，もはや微分演算子ではないことに注意しよう。この $F_{\mu\nu}(x)$ が曲率テンソルまたは場の強さと呼ばれる量である。(30) の変換性は任意の場 φ に対して成立し，$(\varDelta\varphi)'=F'_{\mu\nu}\varphi' dx^\mu dy^\nu$ であるから，$F_{\mu\nu}$ は

$$F'_{\mu\nu}(x)=U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \tag{32}$$

と変換することがわかる。

ついでながら，$[D_\mu,[D_\nu, D_\rho]]$ を添字 μ, ν, ρ について巡回的に回した3項の和が0であるという Jacobi 恒等式

$$0=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu,[D_\rho, D_\sigma]] \tag{33}$$

から，(31) の $F_{\mu\nu}$ に対して

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}D_\nu F_{\rho\sigma}=0 \tag{34}$$

という恒等式が従うことに注意しておく。この (34) は Bianchi (ビアンキ) 恒等式と呼ばれ，電磁場の場合の，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ の形から従う Maxwell 方程式の自明な組 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}=0$，の一般化になっている。

場の強さ $F_{\mu\nu}$ も，ゲージ場 A_μ と同様，Lie 代数 $\mathcal{G}$ の元で

$$(F_{\mu\nu})_i{}^j=\sum_{a=1}^{\dim G}F^a_{\mu\nu}(T_a)_i{}^j \tag{35}$$

と展開される。(32) の $F_{\mu\nu}$ の変換則は，先の (14), (15) と比較すると，$F^a_{\mu\nu}$ が群 G の (局所変換の場合の) **随伴表現**として共変に振舞うことを示している。他方，ゲージ場 A_μ の変換則 (24) の方は，第2項 $UA_\mu U^{-1}$ の部分は随伴表現としての変換と同じであるが，第1項に $(i/g)U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)$ なる非斉次項が現れている。そのためゲージ場自身は G の共変な量ではない。

後に必要になるので，変換パラメータ $\theta^a(x)$ が無限小の場合，すなわち $U(x)\approx 1+ig\theta^a(x)T_a$ の場合，のゲージ変換 (18)，(24) の無限小形を与えておこう：

$$\begin{aligned}\delta\varphi_i(x)&=ig\theta^a(x)(T_a)_i{}^j\varphi_j(x),\\ \delta A^a_\mu(x)&=\partial_\mu\theta^a(x)+gf_{abc}A^b_\mu(x)\theta^c(x)\equiv D_\mu\theta^a(x)\end{aligned} \tag{36}$$

ただし第 2 式は行列記法の (24) の無限小形

$$\delta A_\mu(x)=\partial_\mu\theta(x)+ig[\theta(x),A_\mu(x)] \qquad (\theta(x)\equiv\theta^a(x)T_a) \quad (37)$$

から，両辺に T^a を掛けトレースをとり，成分 A_μ^a に対する変換則に直したものである。(36) の最後の微分 D_μ はパラメータ $\theta^a(x)$ を随伴表現の量とみなしたときの共変微分 $(D_\mu)^{ac}=\partial_\mu\delta^{ac}-igA_\mu^b(x)[\mathrm{ad}(T_b)]^{ac}$ である。

ゲージ不変な Lagrangian 密度　さて今や，ゲージ場 A_μ や物質場 φ の変換則が求まったので，局所ゲージ変換 (18), (24) の下で不変な Lagrangian 密度を書き下すことができる。物質場に関しては，Dirac 場やスカラー場の通常の大局的 G 変換で不変な Lagrangian において，単に微分 ∂_μ をそれぞれの表現に対応する共変微分 D_μ に置き換えればよい：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}=\begin{cases}(D_\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi-V(\varphi^\dagger\varphi) & \text{スカラー場}\\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi & \text{Dirac 場}\end{cases} \quad (38)$$

これらは共変微分の変換則 (22) により明らかに不変である。

ゲージ場に関しては，場の強さ $F_{\mu\nu}$ が (32) の形の変換をするから

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{gauge\ field}}&=-\frac{1}{4}N^{-1}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\\ &=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu}\end{aligned} \quad (39)$$

が明らかにゲージ不変である。N は行列記法に使っている行列 T_a の規格化因子，$\mathrm{tr}(T_aT_b)=N\delta_{ab}$ で，もし基本表現の (5) を使っていれば 1/2 である。(39) の第 2 行では群の添字 a についての和をとっているものとし，場の強さの成分 $F_{\mu\nu}^a$ は (31) の両辺に $N^{-1}\mathrm{tr}(T^a\cdots)$ を演算して

$$F_{\mu\nu}^a(x)=\partial_\mu A_\nu^a(x)-\partial_\nu A_\mu^a(x)+gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \quad (40)$$

と与えられることがわかる。したがって (39) の Lagrangian はゲージ場 A_μ^a の運動項と A_μ の 3 次と 4 次の自己相互作用項を与えることになる。(40) の中のパラメータ g は相互作用項の係数となるので結合定数と呼ばれる。一般の単純群の場合，生成子 T_a の間の交換関係は非可換であり構造定数 f_{abc} が 0 でないので自己相互作用項が存在するのである。電磁場のように群 G が $U(1)$ のときのみ，生成子 T_a が一つしかなく可換だから $f_{abc}=0$ で自己相互作用項がたまたま存在しない。それで，$U(1)$ 以外の場合のゲージ理論を非可換ゲージ理論，あるいは，$G=SU(2)$ の場合に初めて (39) の形の Lagrangian を与えた人達の名をとって Yang (ヤン)-Mills (ミルズ) 理論，と呼ぶ。

ゲージ場の質量項 $(1/2)m^2A^a_\mu A^{a\mu}=(1/2)m^2N^{-1}\,\mathrm{tr}(A_\mu A^\mu)$ は，ゲージ場 A^μ が (24) のように非斉次に変換するため，ゲージ不変性を破るから付け加えられないことに注意しておこう。もう一つ注意をしておきたいのは，ゲージ群 G が単純群でない場合についてである。一般に G がコンパクト群ならば†，

$$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n \tag{41}$$

の形に，単純群か $U(1)$ 群の $G_i\ (i=1,\cdots,n)$ の直積に分解できることが知られている。その場合，上の議論をおさらいすればわかるように，(40) や共変微分 D_μ(21) の中に現れる結合定数 g は，(41) の各因子群 G_i ごとに別々の値 g_i を付与することができる。各因子群ごとに独立に変換するので別々の結合定数 g_i を与えてもゲージ不変性に抵触しないのである。

量子色力学 (QCD)　(量子化した) 非可換ゲージ理論の現実的な例は，量子色力学 (quantum chromodynamics)，略して QCD と呼ばれるものである。ゲージ群 G が $SU(3)$ の場合で，ゲージ場 A^a_μ は 8 成分 (カラー 8 重項) ありグルーオン (gluon) と呼ばれる。物質場は，すべてのハドロン†† (hadron) の基本構成子——クォーク (quark) と呼ばれる——に対応する Dirac 場 ψ_{if} で与えられ，添字 $i=1,2,3$ は $G=SU(3)$ の基本表現 (カラー 3 重項) を表し，もう一つの添字 $f=1,2,\cdots,F$ は，ゲージ群 $SU(3)$ とは独立な添字で，フレーバー (flavor) と呼ばれるクォークの種類を表す。[後にもう少し詳しく説明するが，今日，クォークは 6 種類 ($F=6$) 存在すると考えられており，低い質量の順に，u(up), d(down), s(strange), c(charm), b(bottom), t(top) クォークと名付けられている。]　したがって，QCD の Lagrangian は (38), (39), (7) より

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\sum_{f=1}^{F}\bar{\psi}_{if}\left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-igA^a_\mu\frac{\lambda^a}{2}\right)_i^{\ j}-m_f\,\delta_i^{\ j}\right]\psi_{jf} \tag{42}$$

で与えられる。ただし，カラー 8 重項添字 a，カラー 3 重項添字 i,j についての和記号は省略した。

グルーオンの交換に起因するクォーク間の強い相互作用は，カラー添字

---

† G がコンパクト群でないと Killing 形式 $\mathrm{tr}(T_aT_b)$ が正定値でないので，Lagrangian (39) のゲージ場の運動項に逆符号を持つ成分 A^a_μ が現れ，負計量の粒子という困難が生ずる。

†† ハドロンとは，π や ρ をはじめとする中間子 (メソン, meson)，および陽子や中性子をはじめとするバリオン (baryon) をひっくるめた，強い相互作用をする素粒子の総称である。

i のみに関わるものなので，クォークの種類(＝フレーバー)の違いに全く盲目である点が重要である。それゆえ，もし，$SU(3)$ カラー・ゲージ相互作用によって，クォーク何体かの結合状態が生ずれば，F 種類のクォークの質量 m_f ($f=1,\cdots,F$) がすべて縮退した極限ではクォークはフレーバー群 $U(F)$ の基本表現 $\boldsymbol{F}$ に対応し，その結合状態は必ず $U(F)$ の既約表現多重項として縮退して現れることになる。実際，観測されている数多くのハドロン共鳴状態は，バリオンの場合，クォーク 3 体 $\psi_f\psi_{f'}\psi_{f''}$ として直積 $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F}$ の既約分解から期待される $U(F)$ の多重項として，また，メソンの場合はクォーク・反クォーク $\psi_f\bar{\psi}_{f'}$ の結合状態として $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F}^*$ の既約分解から現れる多重項として，大変うまく分類されることがわかっている。しかも，QCD の Lagrangian (42) では，$U(F)$ 対称性の破れがクォーク質量項 $-m_f\bar{\psi}_{if}\psi_{if}$ のみであるので，そのことから，ハドロンの $U(F)$ 多重項の中での質量の分岐の仕方も予言でき，それも実験値とよく合う。

このとき，バリオンがクォーク**3体**の結合状態であることと，QCD のカラー・ゲージ群が $SU(3)$ ということとが対応している点に注意したい。事実，クォークの単離した 1 体状態 ψ や 2 体状態 $\psi\psi$ や 4 体状態 $\psi\psi\psi\psi$ に対応する共鳴状態は一切観測されず，クォーク 3 体 $\psi\psi\psi$ のバリオンと，クォーク-反クォーク対 $\psi\bar{\psi}$ のメソンのみが観測されているのである。この観測事実は，QCD のゲージ群を $SU(3)$ ととれば，結局，“カラー $SU(3)$ 群の 1 重項 (color singlet) のみが粒子状態として存在し得る” という一言に要約することができる。実際，カラー 3 重項のクォーク場 ψ_{if} からは，最低 3 個を使うか，反クォーク場との対をつくるかして，はじめてカラー 1 重項を構成できることに注意しよう；すなわち

$$\begin{aligned} \text{バリオン：}\quad & B_{ff'f''} \sim \epsilon^{ijk}\,\psi_{if}\,\psi_{jf'}\,\psi_{kf''} \\ \text{メソン：}\quad & M_f{}^{f'} \sim \psi_{if}\,\bar{\psi}^{if'} \end{aligned} \tag{43}$$

が，カラー 1 重項に組み得る(反)クォーク場の数が最小の配位なのである。3 階完全反対称テンソル ϵ^{ijk} が不変テンソルであるのは，カラー群が $SU(3)$ だからである。

カラー 1 重項以外の，すなわちカラー電荷を持った，粒子が現れない現象を**カラーの閉じ込め** (color confinement) と呼ぶ。QCD において実際にカラーの閉じ込めが起こっているかどうかは，極めて非摂動論的なダイナミクスの問題であって，現在まで，誰も満足な形で証明した人はいない。にもかかわらず，誰もが閉じ込めの起こっていることを信じて疑わない。

その理由は，格子ゲージ理論 (lattice gauge theory) に基づくモンテカルロ数値計算がそれを支持しているということ以外に，QCD の摂動計算で発見された (8 章で述べる) 漸近的自由性 (asymptotic freedom) が大きい。漸近的自由性とは，短距離にいけばいくほど，相互作用の強さが弱くなるという性質で，これは，真空がカラー電場に対する媒質として**反誘電体**であることを意味している。すなわち，同種電荷が引き合い，外部からかけたカラー電場 $\boldsymbol{E}$ に対して，真空の分極 $\boldsymbol{P}$ は逆向きになり，カラー電束は $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ で誘電率 ε は $\varepsilon<1$ となる†。そして，もし真空がカラーに対して**完全反誘電体** $\varepsilon=0$ であるならば，完全反磁性体 ($\mu=0$) として特徴付けられる超伝導体の中で磁束 $\boldsymbol{B}$ が広がれずにひも状になったのと同様に，カラー電荷を持つ粒子から出る電束 $\boldsymbol{D}$ はひも状になる。例えばクォーク 1 体の場合は，このひもは $\boldsymbol{D}$ の保存則からいつまでも伸びざるを得ず，無限大のエネルギーを持ち，有限エネルギーでは出現できない，ということになる。一方，全体としてカラー電荷のないカラー 1 重項のメソンやバリオンは，有限の長さのひもでつながれた (反) クォークの結合状態という描像になる。

ここに示したカラー完全反誘電体描像は，カラー閉じ込めに対する直観的描像としては大変わかりやすいものであるが，実際にこれが QCD で起こっていることを示すのは大変難しく，上でも言ったように誰も成功していない。しかし，メソンやバリオンの実際の散乱振幅で観測されている，双対性 (duality) という顕著な性質は，それらが実際にひも状構造を持つことを強く示唆している，のである。

5-2 特異系の正準形式と量子化

ここで，ゲージ場の理論の量子化の際にぶつかる問題を，いくぶん一般的に議論する。

簡単のため有限個の座標変数 q^i ($i=1,2,\cdots,N$) を持ち，作用積分

$$S=\int dt\ L(q,\dot{q})$$

で記述される系を考えることにする。この系の運動は，最小作用の原理か

---

† 通常の電磁気学 ($U(1)$ ゲージ理論) では，異種電荷が引き合うので，必ず $\varepsilon>1$ となる。

ら，とにかく Euler-Lagrange 方程式

$$(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}^i)-\partial L/\partial q^i=0 \qquad (1)$$

で決定される。この際，少々煩わしいが，フェルミオンに対応する古典系も考慮して，座標 q^i が Grassmann 数である場合も以下の式が変更なく成り立つように，2-2 の (3) で定義した右微分，左微分を区別して書くことにする。また符号因子 $(-)^{|i|}$ や $(-)^{|A|}$ の $|i|$ や $|A|$ は，座標 q^i や量 A が，Grassmann 奇のとき 1，Grassmann 偶のとき 0，を表すという約束も前と同じである。したがって，(1) の Euler-Lagrange 方程式は，q^i, $\dot{q}^i$ について右微分である。

第1,2類の拘束条件 量子論に移行するためには，この系の運動を正準形式で扱わねばならず，その際にいろいろと問題が生ずる。通常の手続きは，まず，q^i に共役な運動量変数 p_i を

$$p_i=\partial L(q,\dot{q})/\partial \dot{q}^i \qquad (2)$$

で定義し，これを解いて $\dot{q}^i$ を q,p の関数として表し，Hamiltonian

$$H(q,p)=p_i\dot{q}^i-L(q,\dot{q}) \qquad (3)$$

を求める。ところが，一般には，

$$\det|\partial^2 L(q,\dot{q})/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j|=0$$

となって (2) が $\dot{q}^i$ について完全には解けない場合が生ずる。このような場合を，**特異系** (singular system) と呼ぶ。

(2) が $\dot{q}^i$ について解けないということは，(2) の N 個の組が，完全に独立な (p と $\dot{q}$ の) 関係式ではなく，いくつか $\dot{q}$ の脱落した関係式

$$\phi_A(q,p)=0 \qquad (A=1,2,\cdots,M_1\leqq N) \qquad (4)$$

を含むということを意味する。これらの関係式 (4) は，正準変数 q,p の間の拘束を与え，“一次” 拘束条件 (primary constraints) と呼ばれる。この拘束条件は $M_1=N-\mathrm{rank}\,(\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j)$ の数だけ存在するはずである。

すべての $\dot{q}$ が q と p では表せないにもかかわらず，(3) の Hamiltonian H は $\dot{q}$ に依存しない。このことは実際 (3) を変分すれば，(2) を使って

$$\begin{aligned}\delta H&=\delta p_i\dot{q}^i+p_i\delta\dot{q}^i-(\partial L/\partial\dot{q}^i)\delta\dot{q}^i-(\partial L/\partial q^i)\delta q^i\\&=\delta p_i\dot{q}^i-(\partial L/\partial q^i)\delta q^i\end{aligned} \qquad (5)$$

となり，$\delta\dot{q}^i$ に比例した項がなくなることからわかる。したがって，H は p,q のみの関数で，その変分は

$$\delta H=\delta p_i(\partial/\partial p_i)H+(\partial H/\partial q^i)\delta q^i \qquad (6)$$

で与えられる。しかし，この変分 $\delta p, \delta q$ は任意ではなく，拘束条件 (4) を満たしながらのものであるべきで

$$\delta p_i(\partial/\partial p_i)\phi_A + (\partial\phi_A/\partial q^i)\delta q^i = 0 \tag{7}$$

の制限を受ける。それゆえ，(6) と (5) の $\delta p_i, \delta q^i$ の係数を比較して

$$\dot{q}^i = (\partial/\partial p_i)H + [(\partial/\partial p_i)\phi_A]\lambda^A \tag{8}$$

$$-\partial L/\partial q^i = \partial H/\partial q^i + (-)^{|A||i|}(\partial\phi_A/\partial q^i)\lambda^A \tag{9}$$

を得る。λ^A は Lagrange の未定係数である†。第 2 式 (9) は，さらに，p_i の定義式 (2) と Euler-Lagrange 方程式 (1) を使って

$$\dot{p}_i = -\partial H/\partial q^i - (-)^{|A||i|}(\partial\phi_A/\partial q^i)\lambda^A \tag{10}$$

と書き直せる。

(8) と (10) が正準変数に対する運動方程式である。ここで，Poisson（ポアソン）括弧 (bracket) を

$$\{F, G\}_{\mathrm{P}} \equiv (\partial F/\partial q^i)(\partial/\partial p_i)G - (-)^{|i|}(\partial F/\partial p_i)(\partial/\partial q^i)G \tag{11}$$

で定義することにすれば，(8), (10) は††

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\}_{\mathrm{P}} + \{q^i, \phi_A\}_{\mathrm{P}}\lambda^A \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}_{\mathrm{P}} + \{p_i, \phi_A\}_{\mathrm{P}}\lambda^A \end{aligned} \tag{12}$$

と書ける。この形の正準方程式から，任意の q, p の関数 $F(q, p)$ の時間発展の方程式が

$$\dot{F} = \{F,\ H + \phi_A\lambda^A\}_{\mathrm{P}} - (-)^{|A|}\{F, \lambda^A\}_{\mathrm{P}}\,\phi_A \tag{13}$$

で与えられることがわかるから，Hamiltonian を新たに

$$\tilde{H} = H + \phi_A\lambda^A \tag{14}$$

で定義し直せば，(13) の第 2 項を拘束条件 $\phi_A = 0$ で落として，

$$\dot{F} \approx \{F, \tilde{H}\}_{\mathrm{P}} \tag{15}$$

の簡単な形になる。ここで，波形の等号≈は，拘束条件 $\phi_A = 0$ を満たす q, p に対して成立するという意味で，“弱い等式”(weak equality) と呼ばれる†††。誤解のないように注意しておけば，Poisson 括弧 (11) 自体は，$2N$ 個の正準変数 (q^i, p_i) の位相空間 Γ で定義されており，その計算の際にあらかじめ $\phi_A = 0$ を使ってはいけない。拘束条件 $\phi_A = 0$ $(A = 1, 2, \cdots, M_1)$ は，Γ の ($2N - M_1$ 次元) 部分多様体 (submanifold) Γ^* を定義し，弱い等式

---

† Lagrange の未定係数 λ^A は，拘束条件 ϕ^A と Grassmann 偶奇性が同じで，符号因子を $|A|$ と書いた。

†† $\partial F/\partial q^i = (-)^{|i|(|F|+1)}(\partial/\partial q^i)F$ に注意せよ。

††† この意味では (4) の拘束条件も $\phi_A \approx 0$ と書くべきであった。

≈は Γ^* に制限したときに成立するという意味である。さらに，(14) の Hamiltonian の再定義は，決して恣意的なものではなく，そもそも Lagrangian から Hamiltonian を決める際に，拘束条件 ϕ_A に比例する量だけ不定性があったのだということに注意しておきたい。

話は残念ながらこれですべてではない。拘束条件 (4) が時間発展と無矛盾であるためには，

$$\dot{\phi}_A=\{\phi_A, H\}_{\mathrm{P}}+\{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{P}}\lambda^B\approx 0 \tag{16}$$

が満たされなければならない。ところが，この式 (16) は，単に未定係数 λ^A を決定するだけの場合もあれば，新たな条件式——"二次的" 拘束条件 (secondary costraints) を与える場合もある：(16) の λ の係数行列のランク rank $(\{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{P}})$ [$\phi_A=0$ を満たす Γ^* 上でのランク] を $r_1\,(\leqq M_1)$ とすると，適当に拘束条件 ϕ_A の線形結合をとり直して

$$\{\phi_A, \phi_B\}_{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix}\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}_{\mathrm{P}} & \{\phi_\alpha, \phi_b\}_{\mathrm{P}}\\ \{\phi_a, \phi_\beta\}_{\mathrm{P}} & \{\phi_a, \phi_b\}_{\mathrm{P}}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}C_{\alpha\beta} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$A=(\alpha, a),\quad 1\leqq\alpha,\beta\leqq r_1,\quad r_1+1\leqq a, b\leqq M_1,\quad \det C\not\approx 0.$$

の形にできる。そうすれば，(16) の初めの r_1 個の式 $(A=\alpha\leqq r_1)$ は $\det C_{\alpha\beta}\not\approx 0$ であるから，未定係数 λ^α $(\alpha=1,\cdots,r_1)$ を

$$\lambda^\alpha=-C^{-1\,\alpha\beta}\{\phi_\beta, H\}_{\mathrm{P}} \tag{18}$$

と決定するが，残りの M_1-r_1 個の式 $(r_1+1\leqq A=a\leqq M_1)$ は未定係数を含む項が落ちて，

$$\{\phi_a, H\}_{\mathrm{P}}\approx 0 \tag{19}$$

となる。左辺の Poisson 括弧がすべて，すでに現れている "一次" 拘束条件 ϕ_A の線形結合になっているなら，これで問題ないが，そうでない場合，(19) が新たな "二次的" 拘束条件を与えるのである。

(19) が $M_2\neq 0$ 個の "二次的" 拘束条件を与える場合は，それらの条件も "一次" 拘束条件 (4) と一緒にして，今度は添字 A が 1 から $M_1+M_2\,(\leqq 2N)$ まで走るとして，上の (16) から (19) に至る操作をもう一度行う。最後の (19) が，再び新たな拘束条件を含めば，その条件をその段階までに現れた拘束条件と一緒にして，またこの操作を繰り返し，(19) の左辺が知られている拘束条件の線形結合となり，もはや新しい拘束条件を生じない，という段階まで行う†。この最後の段階で，すべての拘束条件 (初めの "一次"

---

† この操作は，有限自由度系では必ず有限ステップで終わる。無限自由度の場の理論においても有限ステップで終わらない例を筆者は知らない。

拘束条件から第二ステップ以降の“二次的”拘束条件まで含めたすべて)の間の Poisson 括弧はまた(17)の形で，拘束条件の数 M_1 とランク r_1 は，それぞれ $M=M_1+M_2+\cdots\ (\leqq 2N)$，$r=r_1+r_2+\cdots(\leqq M)$ で置き換えられたものとなっている。Hamiltonian $\widetilde{H}$ は，(18)により r 個の未定係数 λ^α が決まるので

$$\widetilde{H}\ =H'+\phi_a\lambda^a \tag{20}$$

$$H'\equiv H-\phi_\alpha C^{-1\ \alpha\beta}\{\phi_\beta, H\}_{\mathrm{P}} \tag{21}$$

で与えられている。(20)第2項の $(M-r)$ 個の λ^a は不定のままとどまる。(19)がもはや新しい拘束条件を与えないということは，全拘束条件 $\phi_A=(\phi_\alpha, \phi_a)\,[1\leqq\alpha\leqq r,\ \ r+1\leqq a\leqq M]$ に対して

$$\{\phi_A, \widetilde{H}\}_{\mathrm{P}}=c_A{}^B\phi_B \tag{22}$$

を意味している。

Dirac は，力学量 (q^i, p_i の関数) $R(q, p)$ が，すべての拘束 ϕ_A と

$$\{R, \phi_A\}_{\mathrm{P}}\approx 0 \qquad (A=1, 2, \cdots, M) \tag{23}$$

を満たすとき，R を第1類 (first class)，そうでないとき，第2類 (second class)，と呼んだ†。この呼び方に従えば，(22)は，(20)の Hamiltonian $\widetilde{H}$ が第1類であることを示している。また，(17)の Poisson 括弧の表式から，拘束 ϕ_A のうち，最初の r 個の ϕ_α は第2類，残りの $M-r$ 個の ϕ_a は第1類，であることがわかる。拘束条件に対する上での“一次”，“二次的”の区別は重要でないが，第1類か第2類かの分類は重要である。次に第2類，第1類の拘束条件の取り扱い方を別々に，この順で述べる。

第2類拘束条件の取扱い　後述するように，第1類拘束条件も結局は第2類拘束条件に帰着させることになるので，ここでは，まず，すべての拘束条件が第2類だとして正準理論でどう扱うかを述べよう。

拘束条件 $\phi_\alpha\,(\alpha=1, \cdots, r)$ がすべて第2類であるとの仮定から，

$$C_{\alpha\beta}=\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}_{\mathrm{P}} \tag{24}$$

なる $r\times r$ 行列は，$\det C_{\alpha\beta}\not\approx 0$ で逆行列 $C^{-1\ \alpha\beta}$ を持つ：

$$C_{\alpha\beta}\,C^{-1\ \beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha, \qquad C^{-1\ \alpha\beta}\,C_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma. \tag{25}$$

拘束 ϕ_α がすべて Grassmann 偶のふつうの量のとき，$C_{\alpha\beta}$ は反対称行列であるから，$\det C_{\alpha\beta}\not\approx 0$ は，拘束の個数 r が偶数個 $r=2m$ でなければならないことを意味している。このことは Grassmann 奇の拘束がある場合も普

† (23)の波形等号≈は，一次的，二次的を問わず，**すべての**拘束条件 $\phi_A=0\ (A=1, 2, \cdots, M)$ を使った場合に等しいという意味である。

通成り立っているのでこれを以下仮定し，$r=2m$，とおく。

ここで，Dirac に従って，次の **Dirac 括弧**と呼ばれるものを導入する：

$$\{F, G\}_{\mathrm{D}} \equiv \{F, G\}_{\mathrm{P}} - \{F, \phi_\alpha\}_{\mathrm{P}} C^{-1\,\alpha\beta} \{\phi_\beta, G\}_{\mathrm{P}}. \tag{26}$$

もとの Poisson 括弧は，$A\approx 0$ であっても任意の X に対し $\{A, X\}_{\mathrm{P}}\approx 0$ とは限らなかったけれど，この Dirac 括弧は，$A\approx 0$ なら $\{A, X\}_{\mathrm{D}}\approx 0$ を満たす。実際，任意の拘束条件 ϕ_γ に対し

$$\{\phi_\gamma, X\}_{\mathrm{D}} = \{\phi_\gamma, X\}_{\mathrm{P}} - C_{\gamma\alpha} C^{-1\,\alpha\beta} \{\phi_\beta, X\}_{\mathrm{P}} = 0 \tag{27}$$

が成り立つからである。それゆえ，$\phi_\alpha=0\ (\alpha=1, 2, \cdots, 2m)$ で定義される $(2N-2m)$ 次元部分位相空間 Γ^* 上で一致するような物理量の類 (class)

$$\hat{F} \equiv \{F \mid F - F_0 = c^\alpha \phi_\alpha\}, \qquad (F_0 \text{ は類 } \hat{F} \text{ のある代表元}) \tag{28}$$

の任意の元に対して，Dirac 括弧は Γ^* 上で同一の括弧を与える。

この事実は，Dirac 括弧が実は，$\phi_\alpha=0$ で指定される部分位相空間 Γ^* 内で，その正準座標 $q^{*I}, p^*_I\ (1\leqq I\leqq N-m)$ によって定義される Poisson 括弧

$$\{F, G\}_{\mathrm{P}} = (\partial F/\partial q^{*I})(\partial/\partial p^*_I) G - (-)^{|I|}(\partial F/\partial p^*_I)(\partial/\partial q^{*I}) G \tag{29}$$

と同一のものを与えているのではないか，と想像させる。実際そうであることを示そう。ただし，煩わしさを避けるために，しばらくすべての量が可換な普通の c 数の場合に限ろう。

一般に，正準座標 $q^i, p_i\ (i=1, \cdots, N)$ で座標付けられる位相空間 Γ において，正準 2 次微分形式と呼ばれる閉じた (closed) 2-form†

$$d\alpha \equiv dq^i \wedge dp_i \qquad (i \text{ については和をとる}) \tag{30}$$

は，(座標付けによらない概念で) 基本的な量である。例えば，正準変換 $(q^i, p_i) \to (\bar{q}^i, \bar{p}_i)$ というのは，2-form (30) を不変にする変換

$$d\alpha = dq^i \wedge dp_i = d\bar{q}^i \wedge d\bar{p}_i = d\bar{\alpha} \tag{31}$$

として特徴付けられる。さて，ここで，位相空間 Γ の必ずしも正準変数ではない勝手な座標付け

$$z_\mu = z_\mu(q, p) \qquad (\mu=1, 2, \cdots, 2N) \tag{32}$$

を導入し，2-form (30) を，$dq^i=(\partial q^i/\partial z_\mu)dz_\mu$ 等を使って

$$d\alpha = dq^i \wedge dp_i = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{2N} (z_\mu, z_\nu)\, dz_\mu \wedge dz_\nu \tag{33}$$

と書き直したとする。このとき，右辺の係数は Lagrange 括弧

† 微分形式 p-form の簡単な説明は，II 巻付録 E を見よ。

$$(z_\mu, z_\nu) = \frac{\partial q^i}{\partial z_\mu}\frac{\partial p_i}{\partial z_\nu} - \frac{\partial q^i}{\partial z_\nu}\frac{\partial p_i}{\partial z_\mu} \tag{34}$$

を定義する。容易に確かめられるように，Lagrange 括弧は Poisson 括弧 $\{z_\mu, z_\nu\}_{\rm P}$ の逆行列を与える：

$$\sum_{\mu=1}^{2N}(z_\mu, z_\nu)\{z_\mu, z_\rho\}_{\rm P} = \delta_{\nu\rho}. \tag{35}$$

すなわち，Poisson 括弧は Lagrange 括弧の逆行列として特徴付けられる。

今，特に，この z-変数として最後の $2m$ 個を第 2 類拘束 ϕ_α $(\alpha=1, \cdots, 2m)$ にとってみよう：

$$\underbrace{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{2N-2m}}_{(2N-2m)\text{ 個の }\Gamma^*\text{ の座標}},\ \underbrace{z_{2N-2m+1}=\phi_1,\ z_{2N-2m+2}=\phi_2,\ \cdots,\ z_{2N}=\phi_{2m}}_{2m\text{ 個の拘束変数}} \tag{36}$$

最初の $(2N-2m)$ 個の z-変数は，$\phi_\alpha=0$ で指定される部分位相空間 Γ^* の座標付けとなる。このときの重要な性質は，初めの $(2N-2m)$ 個の Γ^* の変数部分だけに制限した Lagrange 括弧 $\{(z_\mu, z_\nu)\}_{1\leqq\mu,\nu\leqq 2N-2m}$ が，Dirac 括弧 $\{z_\mu, z_\nu\}_{\rm D}$ の逆行列を与えることである：

$$\sum_{\mu=1}^{2N-2m}(z_\mu, z_\nu)\{z_\mu, z_\rho\}_{\rm D} = \delta_{\nu\rho} \qquad (1\leqq\nu, \rho\leqq 2N-2m\text{ に対し}). \tag{37}$$

なぜなら，任意の X に対し $\{\phi_\alpha, X\}_{\rm D}=0$ だから，(37) の添字 μ についての和は $2N$ まで拡大しても変わらず，(26), (35) を用いて

$$\begin{aligned}(37)\text{ 左辺} &= \sum_{\mu=1}^{2N}(z_\mu, z_\nu)\{z_\mu, z_\rho\}_{\rm D} \\ &= \delta_{\nu\rho} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{2m}\delta_{\nu,2N-2m+\alpha}\,C^{-1\ \alpha\beta}\{z_{2N-2m+\beta}, z_\rho\}_{\rm P} \\ &= \delta_{\nu\rho}\end{aligned} \tag{38}$$

が従うからである。(37) は，Dirac 括弧が，部分位相空間 Γ^* に制限した Lagrange 括弧の逆行列であること，すなわち Γ^* における Poisson 括弧 (29) と一致していること，を意味している。

(37) はあまりポピュラーではないが，Dirac 括弧を計算する具体的方法としても大変有用な式であることを強調しておこう。実際 (36) のように変数の組を選び，2-form $dq^i\wedge dp_i$ を $dz_\mu\wedge dz_\nu$ で書き直すのはすぐにでき，その係数から (33) の Lagrange 括弧を読み取り，その $(2N-2m)\times(2N-2m)$ 部分行列の逆行列を求めればよい。この方法は，多くの場合，もともとの Dirac 括弧の定義式 (26) の忠実な計算に比べ相当楽である。

これらの事実から，第2類拘束条件に対する別の取り扱い法があることがわかる。すなわち，単に，$2m$ 個の拘束条件 $\phi_\alpha=0$ を解き，余分な変数を消去して，すべての量を適当に選んだ独立な Γ^* の正準変数 q^{*I}, p^*_I で表すのである。そうすれば，普通の Poisson 括弧で話は済み，(それと一致する) Dirac 括弧など考える必要はないことになる。もちろんそれでよいのだが，実際には，$\phi_\alpha=0$ の拘束条件をあらわに解くのが難しいとか，解けるけれど解くと系の対称性があらわには見えなくなるとか，種々な不都合が現れることが多い。また，特に場の理論の場合は，拘束条件を解くと，重要な Lorentz 不変性が明白でなくなったり，非局所的な相互作用が誘起されたりする。それらの不都合を避けるためにすべての余分な変数を残しておき，なおかつ，物理的には Γ^* で話をするのと等価な正準形式を与えるのが，Dirac 括弧の方法であり，その利点なのである。

Dirac 括弧は Γ^* における Poisson 括弧であるから，Poisson 括弧のすべての性質が成り立つ。例えば

$$\begin{aligned}&\{F,G\}_{\mathrm{D}}=-(-)^{|F||G|}\{G,F\}_{\mathrm{D}},\\&\{\{F,G\}_{\mathrm{D}},H\}_{\mathrm{D}}+(-)^{|F|(|G|+|H|)}\{\{G,H\}_{\mathrm{D}},F\}_{\mathrm{D}}\\&\qquad\qquad+(-)^{|H|(|F|+|G|)}\{\{H,F\}_{\mathrm{D}},G\}_{\mathrm{D}}=0,\end{aligned}\tag{39}$$

など。[Dirac 括弧を使う限り，弱い等号≈と強い等号＝の区別はもはや重要ではないが，(26) の定義から直接確かめられるように (39) は強い等式として成立する (演習問題 5.1)。]　また系の Hamiltonian は (21) の

$$H'=H-\phi_\alpha C^{-1\,\alpha\beta}\{\phi_\beta,H\}_{\mathrm{P}}\tag{40}$$

で与えられていたけれど，力学量 F の運動方程式が (12), (18) より

$$\begin{aligned}\dot{F}&=\{F,H\}_{\mathrm{P}}-\{F,\phi_\alpha\}_{\mathrm{P}}C^{-1\,\alpha\beta}\{\phi_\beta,H\}_{\mathrm{P}}\\&=\{F,H\}_{\mathrm{D}}\approx\{F,H'\}_{\mathrm{D}}\end{aligned}\tag{41}$$

となるので，(40) の ϕ_α に比例する項は忘れてよいことになる。

第2類拘束系の量子化　量子論に移行するには，Dirac 括弧の i 倍を (反) 交換関係に置き換えればよい：

$$i\{F,G\}_{\mathrm{D}}\longrightarrow[F,G\}\equiv FG-(-)^{|F||G|}GF\tag{42}$$

古典論の段階で Dirac 括弧を計算し，それを演算子 F, G の間の正準 (反) 交換関係に読み換えるのである。拘束条件 $\phi_\alpha=0$ も演算子 q^i, p_i の間の拘束となるが，上の Dirac 括弧の性質から，このように設定した正準 (反) 交換関係と矛盾しない。

演算子型式 (operator formalism) の量子論はこの手続きで完全に決定さ

れる。しかしながら，このような量子力学系で，**4** 章で議論した遷移振幅に対する経路積分の表式がどのように変更を受けるか，を見ておくことも，応用上有益である。上で述べたように，Dirac 括弧を経由した量子化は，余分な変数を消去した後の独立な Γ^* の正準変数 q^{*I}, p^*_I を用いた普通の正準量子化と等価であるから，ある初期状態 $\psi_{\rm I}$ から終状態 $\psi_{\rm F}$ への遷移振幅は，**4-1** の (15) より

$$T \equiv \langle \psi_{\rm F}, t_{\rm F} | \psi_{\rm I}, t_{\rm I} \rangle$$
$$= \int \mathcal{D}p^* \mathcal{D}q^* \ \psi^*_{\rm F} \psi_{\rm I} \ \exp i \int dt [p^* \dot{q}^* - H^*(p^*, q^*)] \tag{43}$$

で与えられる。ただし H^* は系の Hamiltonian H を独立変数 q^*, p^* で表したものである。しかし，この表式 (43) では，拘束条件 $\phi_\alpha=0$ をあらわに解いてすべてを q^*, p^* で表す必要があり，上述のような不便がある。ここでの主張は，(43) の表式が実は等価に

$$T = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \ \psi^*_{\rm F} \psi_{\rm I} \prod_t \left[\prod_{\alpha=1}^{2m} \delta(\phi_\alpha) \cdot \det^{\frac{1}{2}}(\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}_{\rm P}) \right]$$
$$\times \exp i \int dt [p\dot{q} - H(p, q)] \tag{44}$$

と書けるということである。ここでの経路積分は，もとのすべての変数にわたる $\prod_{i=1}^{N} \mathcal{D}p_i \mathcal{D}q^i$ である。

(44) と (43) が一致していることを証明しよう。まず，$2m$ 個の拘束 ϕ_α を線形変換で組み換えて

$$\begin{pmatrix} L_{a\alpha} \\ L_{b\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1 \leqq \alpha \leqq 2m) \\ (1 \leqq a, b \leqq m) \end{matrix} \tag{45}$$

とし，最初の m 個の拘束 ψ_a の間の Poisson 括弧がすべて

$$\{\psi_a, \psi_b\}_{\rm P} \approx 0 \tag{46}$$

となるように (45) の $2m \times 2m$ 行列 L (p, q の関数) を選ぶ†。そうすれば，δ 関数の性質から

$$\prod_{\alpha=1}^{2m} \delta(\phi_\alpha) = |\det L| \cdot \prod_{a=1}^{m} (\delta(\psi_a)\delta(\varphi_a)) \tag{47}$$

となるが，一方 $\phi_\alpha=0$ で指定される部分位相空間 Γ^* 上では

$$L\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}_{\rm P} L^T \approx \begin{pmatrix} \{\psi_a, \psi_c\}_{\rm P} & \{\psi_a, \varphi_d\}_{\rm P} \\ \{\varphi_b, \psi_c\}_{\rm P} & \{\varphi_b, \varphi_d\}_{\rm P} \end{pmatrix} \tag{48}$$

---

† これは Schmidt の直交化法のような手続きでできる。

が成り立つから，(46) の条件により (47) の δ 関数の前で

$$\det{}^2 L\cdot\det(\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}_{\rm P}) = \det{}^2(\{\psi_a, \varphi_b\}_{\rm P}) \tag{49}$$

が成立している。したがって (44) に現れている因子に対して

$$\prod_{\alpha=1}^{2m}\delta(\phi_\alpha)\cdot\det{}^{\frac{1}{2}}(\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}_{\rm P}) = \prod_{a=1}^{m}(\delta(\psi_a)\delta(\varphi_a))\cdot|\det(\{\psi_a, \varphi_b\}_{\rm P})| \tag{50}$$

の等式を得る。

(45) の組み換えで，部分位相空間 Γ^* は $2m$ 個の条件 $\psi_a=\varphi_a=0$ で指定されることになった。この $(2N-2m)$ 次元の Γ^* 内の座標付けを与えるのが正準座標 q^{*I}, p^*_I であるが，全体の $2N$ 次元位相空間 Γ の (Γ^* 超平面近傍での) 正準座標として，この $(N-m)$ 対の q^*, p^* に加えて，m 個の座標変数

$$q'^a \equiv \psi_a(q, p) \qquad (a=1, 2, \cdots, m) \tag{51}$$

とそれに共役な運動量変数 p'_a とを選ぶことにする。Γ^* は拘束 $\psi_a=0$ を満たす断面であるから $\partial\psi_a/\partial q^*|_{\Gamma^*}=\partial\psi_a/\partial p^*|_{\Gamma^*}=0$ であり，さらに，条件 (46)，$\{\psi_a, \psi_b\}_{\rm P}|_{\Gamma^*}=0$，を満たしているという ψ_a の性質により，少なくとも今必要な Γ^* の無限小近傍では，ψ_a を (51) のように q^*, p^* に独立な座標変数 q'^a としてとることができるのである。そこで，もとの変数 (q, p) から新しい変数 (q^*, q', p^*, p') への変換は正準変換となる。

(44) の経路積分表式で，この新しい正準変数へ変数変換を行えば，積分測度 $\mathscr{D}p\mathscr{D}q$ や $\int dt\, p\dot{q}$ は正準変換で不変であることと (50) の等式とを用いて，

$$\begin{aligned}\text{式 (44)} &= \int \mathscr{D}p^*\mathscr{D}q^*\mathscr{D}p'\mathscr{D}q'\ \psi^*_{\rm F}\psi_{\rm I}\prod_t\left[\prod_{a=1}^{m}(\delta(q'^a)\delta(\varphi_a))|\det(\partial\varphi_a/\partial p'_b)|\right]\\ &\quad\times\exp i\int dt[p^*\dot{q}^* + p'\dot{q}' - H(p^*, p', q^*, q')]\end{aligned} \tag{52}$$

となる。ただし，ここで，Poisson 括弧が正準変換で不変であるので，

$$\det(\{\psi_a, \varphi_b\}_{\rm P}) = \det(\{q'^a, \varphi_b\}_{\rm P}) = \det(\partial\varphi_b/\partial p'_a) \tag{53}$$

となることを使った。Γ^* は $q'^a=0$ および

$$\varphi_a(q^*, q'=0, p^*, p')=0 \qquad (a=1, \cdots, m) \tag{54}$$

を満たす解 $p'_a=p'_a(q^*, p^*)$ で指定される。したがって (43) の Hamiltonian H^* は

$$H^*(p^*, q^*) = H(p^*, p'(q^*, p^*), q^*, q'=0) \tag{55}$$

のことである。拘束 φ_b は Γ^* の近傍で

$$\varphi_b(q^*, q', p^*, p') = \partial\varphi_b/\partial q'^a|_{\Gamma^*} q'^a + \partial\varphi_b/\partial p'_a|_{\Gamma^*}[p'_a - p'_a(q^*, p^*)] \qquad (56)$$

と展開されるから再び δ 関数の性質により

$$\prod_{a=1}^{m}(\delta(q'^a)\delta(\varphi_a))\,|\det(\partial\varphi_b/\partial p'_a)| = \prod_{a=1}^{m}\delta(q'^a)\delta[p'_a - p'_a(q^*, p^*)] \qquad (57)$$

を得る。(57) と (55) を用いると (52) が (43) に帰着することがわかり，(44) と (43) の等価性の証明が終わる。

第1類拘束条件の取扱い 最後に第1類拘束条件の取扱い法を述べる。まず，第1類拘束 ϕ_a $(a=1, \cdots, M-2m)$ と第2類拘束 ϕ_α $(\alpha=1, \cdots, 2m)$ が共存している場合でも，第1類拘束 ϕ_a の Poisson 括弧は第1類拘束だけの線形結合になる，

$$\{\phi_a, \phi_b\}_{\mathrm{P}} = f_{ab}{}^c\phi_c, \qquad (58)$$

ことに注意しよう。これは一般に第1類の力学量 R, S の Poisson 括弧 $\{R, S\}_{\mathrm{P}}$ がまた第1類になるからである。実際，第1類力学量の条件 (23) が，強い等式として

$$\{R, \phi_A\}_{\mathrm{P}} = r_A{}^B\phi_B \qquad (A=(a, \alpha)) \qquad (59)$$

と書けることと，Poisson 括弧が Jacobi 恒等式を満たすこと，を使えばすぐに $\{\{R, S\}_{\mathrm{P}}, \phi_A\}_{\mathrm{P}} \approx 0$ がいえる。

第1類拘束 ϕ_a が存在すると，(20) で見たように，Hamiltonian $\tilde{H}$ はその個数だけ全く決定することのできない未定係数 λ^a を持つことになる：

$$\tilde{H} = H' + \phi_a\lambda^a \qquad (60)$$

この Hamiltonian で (22) が成り立ち，すべての拘束条件 $\phi_A = (\phi_a, \phi_\alpha) = 0$ が時間発展で保たれるのである。ところが，正準変数 q, p は，必ずしも ϕ_a との Poisson 括弧が 0 になるわけではないから，それらの時間発展は

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &\approx \{q^i, H'\}_{\mathrm{P}} + \{q^i, \phi_a\}_{\mathrm{P}}\lambda^a \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H'\}_{\mathrm{P}} + \{p_i, \phi_a\}_{\mathrm{P}}\lambda^a\end{aligned} \qquad (61)$$

のように，不定な係数 λ^a に依存する。すなわち，系の運動が第1類拘束条件の数だけ決まらない。決まらない方向は，

$$\delta q^i \equiv \{q^i, \phi_a\}_{\mathrm{P}}, \qquad \delta p_i \equiv \{p_i, \phi_a\}_{\mathrm{P}} \qquad (62)$$

であるが，これらは，ϕ_a を母関数 (generator) とする (すなわち ϕ_a で生成される) 正準変換である。このことは，系に，第1類拘束 ϕ_a で生成される変換 (62) の下での不変性が存在して，すべての物理量 F がこの変換で不変であるべきこと，

$$\delta F = \{F, \phi_a\}_{\mathrm{P}} \approx 0 \qquad (63)$$

を意味している。さらに(58)は，ϕ_a の生成する変換が閉じていて，構造定数 $f_{ab}{}^c$ を持つ Lie 代数を構成していることを示している。これらは，(局所)ゲージ不変性を持つ系に特徴的な事柄で，第1類拘束 ϕ_a はゲージ変換を引き起こす母関数になっているのである。

第1類拘束条件に対する一つの取扱い方法は，ゲージ固定条件をおくものである。元来，ゲージ変換で動く方向(62)へは系の運動は決まらず，すべての物理量はそちらの方向にどのように動かしても不変であるので，その方向の運動をあらかじめ勝手に手で決めてやってもかまわない。そこで，第1類拘束条件の数だけ勝手な条件

$$\chi_a(q, p) = 0 \qquad (a = 1, \cdots, M-2m) \qquad (64)$$

をおく。この手でおく条件がゲージ固定条件(gauge-fixing condition)と呼ばれるものだが，全く任意ではなく，ゲージ変換の方向の運動がこれで完全に固定されるためには Hamiltonian (60) に現れる不定な係数 λ^a が決まるようなものでなければならない。この要請は，ゲージ固定条件(64)が任意の時刻で成り立つという条件

$$\dot{\chi}_a \approx \{\chi_a, H'\}_{\mathrm{P}} + \{\chi_a, \phi_b\}_{\mathrm{P}} \lambda^b \qquad (65)$$

が λ^a を決定すべしということで，

$$\det\{\chi_a, \phi_b\} \not\approx 0 \qquad (66)$$

を要求することになる。$\{\chi_a, \chi_b\}_{\mathrm{P}}$ は何でもよい。この条件(66)は，$\{\phi_a, \phi_b\}_{\mathrm{P}} \approx 0$ を用いると，χ_a と ϕ_a をひっくるめた行列式が

$$\det\begin{vmatrix} \{\chi_a, \chi_c\}_{\mathrm{P}} & \{\chi_a, \phi_d\}_{\mathrm{P}} \\ \{\phi_b, \chi_c\}_{\mathrm{P}} & \{\phi_b, \phi_d\}_{\mathrm{P}} \end{vmatrix} \approx \det{}^2 |\{\chi_a, \phi_b\}_{\mathrm{P}}| \not\approx 0 \qquad (67)$$

となるから，$2(M-2m)$ 個の条件式 (ϕ_a, χ_b) が全体として第2類拘束になるべしということを意味する。したがって，(64)のゲージ固定条件を設定すれば，すべて第2類拘束条件となるので，前の第2類拘束系の取り扱いに帰着する。

第1類拘束条件に対する二つ目の取り扱い方を述べよう。上で注意したように，第1類拘束条件はそもそも系が(局所)ゲージ不変性を持つところから生じた。それゆえ，議論の出発点の Lagrangian の段階からゲージ固定を勝手にしてもよいわけで，Lagrangian にゲージ固定項と呼ばれる項を適当に付け加え，その変更した Lagrangian から出発すればもはや第1類拘束条件が現れない，というようにやるのである。量子電磁気学(QED)

の場合の Fermi 項と呼ばれる $-(1/2)(\partial_\mu A^\mu)^2$ がゲージ固定項のよく知られた例であるが，実は，$U(1)$ 群以外の非可換ゲージ理論の場合は，そのような素朴なゲージ固定項ではうまくいかない。Lagrangian の段階でどのようにゲージ固定を行えばよいかは次節で述べよう。 この「Lagrangian 段階でのゲージ固定」による取扱い法は，場の理論の場合，相対論的不変性を明白にしたまま扱えるという大きな利点を持つので，この本では主としてこの方法を採用する。

量子論においては，第1類拘束条件に対するさらに別な取扱い方もある。それは，ゲージ固定条件をおかず，その代わりに系の物理的状態 |phys⟩ に対して

$$\phi_a|\text{phys}\rangle=0 \qquad (a=1,\cdots,M-2m) \tag{68}$$

を要求するのである。このような状態を選び出す条件は，一般に補助条件 (subsidiary condition) と呼ばれる。今の場合，ϕ_a はゲージ変換を生成する演算子 (generator) であるから，(68) は“物理的状態はゲージ不変であるべし”との要求になっている。ゲージ固定条件をおかないから (60) の λ^a は不定だけれど勝手な値 (例えば $\lambda^a=0$) に決めておく。そうすると，とにかくすべての演算子の時間発展は決まり，しかも，物理的状態は (68) を満たすので

$$\langle\text{phys}|[F,\phi_a\}|\text{phys}'\rangle=0 \tag{69}$$

となって，任意の力学量 F の時間発展に λ^a を勝手にとった任意性は物理的状態空間に現れない。(68) の補助条件が矛盾を含まないのは，ϕ_a が第1類拘束で，その (反) 交換関係が (58) の示すように閉じているおかげであることに注意しておこう。

5-3　ゲージ場の量子化：経路積分型式

ここで，5-1 で与えた，ゲージ不変な Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}(A,\varphi)=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\mathcal{L}_{\text{matter}}(\varphi,D_\mu\varphi), \tag{1}$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{2}$$

$$D_\mu\varphi=(\partial_\mu-igT^aA^a_\mu)\varphi, \tag{3}$$

を持つ系の量子化を議論する。$\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は 5-1 の (38) で与えたような物質場の Lagrangian であるが，物質場 φ の量子化に関しては取り立てて特別

なことはないので，ここではもっぱらゲージ場 A_μ^a に関する量子化を問題にする。

拘束条件　ゲージ場 A_μ^a に共役な運動量変数 $\pi^{a\mu}$ は

$$\pi^{a\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu^a}=F^{a\,\mu 0} \tag{4}$$

となる。これは，μ が空間成分 $i=1,2,3$ のとき，3次元ベクトル記号 $\boldsymbol{A}\equiv(A^1,A^2,A^3)$ を使って，

$$\boldsymbol{\pi}^a=-\dot{\boldsymbol{A}}^a-\nabla A_0^a+gf_{abc}\boldsymbol{A}^bA_0^c\equiv\boldsymbol{E}^a \tag{5}$$

となる。$\boldsymbol{E}^a$ は Maxwell 方程式の場合の電場に対応する。この式は運動量変数 $\boldsymbol{\pi}^a$ と時間微分 $\dot{\boldsymbol{A}}^a$ を関係づけるので普通のものである。ところが，(4) の時間成分 $\mu=0$ は，$F^{a\mu\nu}$ が μ,ν について反対称だから 0 となってしまう：

$$\pi_0^a=0. \tag{6}$$

すなわち，(1) の $\mathcal{L}$ に $\dot{A}_0^a$ が含まれていないのである。(6) はこの系の“一次”拘束条件である。

系の Hamiltonian 密度 $\widetilde{\mathscr{H}}$ は，拘束 (6) の未定係数項 $\pi_0^a\lambda^a$ を含めて

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{H}}&=\pi^{a\mu}\dot{A}_\mu^a+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\,\mu\nu}+\mathscr{H}_{\text{matter}}(\pi_\varphi,\varphi,A_\mu^a)+\pi_0^a\lambda^a\\&=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{E}^a)^2+(\boldsymbol{B}^a)^2]+\boldsymbol{\pi}^a\cdot(\nabla A_0^a-gf_{abc}\boldsymbol{A}^bA_0^c)+\mathscr{H}_{\text{matter}}+\pi_0^a\lambda^a\end{aligned} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}^a\equiv-(F_{23}^a,F_{31}^a,F_{12}^a)=\nabla\times\boldsymbol{A}^a-\frac{1}{2}gf_{abc}\boldsymbol{A}^b\times\boldsymbol{A}^c \tag{8}$$

と計算される。2行目では $\pi_0^a\dot{A}_0^a$ 項を最後の $\pi_0^a\lambda^a$ 項に吸収した。拘束条件 (6) が時間発展と無矛盾であるためには

$$\dot{\pi}_0^a\approx\left\{\pi_0^a,\int d^3x\,\widetilde{\mathscr{H}}\right\}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a-\rho^a\approx 0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^a-gf_{abc}\boldsymbol{A}^b\cdot\boldsymbol{\pi}^c, \tag{10}$$

$$\rho^a(\varphi,\pi_\varphi)\equiv\frac{\partial\mathscr{H}_{\text{matter}}}{\partial A_0^a} \tag{11}$$

を満たさねばならない。ただし

$$\{A_\mu^a(\boldsymbol{x},t),\pi^{b\nu}(\boldsymbol{y},t)\}_{\mathrm{P}}=\delta_\mu^\nu\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{12}$$

の Poisson 括弧を用いた。(9) が“二次的”拘束条件である。(Gauss 則に対応している。)　(9) の $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a-\rho^a$ と Hamiltonian との Poisson 括弧は (系のゲージ不変性のために) 恒等的に 0 になっていて，もはやこれ以上の拘束条件が現れないことがわかる。したがって，結局，このゲージ理論の

系では

$$\begin{aligned}\phi_1^a(\boldsymbol{x})&\equiv\pi_0^a(\boldsymbol{x})\approx 0\\ \phi_2^a(\boldsymbol{x})&\equiv\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a(\boldsymbol{x})-\rho^a(\boldsymbol{x})\approx 0\end{aligned}\tag{13}$$

の $2\times\dim G$ (×空間座標 $\boldsymbol{x}$ の無限) 個だけ拘束条件があることになる。これらの拘束の間の Poisson 括弧は

$$\{\phi_1^a(\boldsymbol{x}),\phi_1^b(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{P}}=\{\phi_1^a(\boldsymbol{x}),\phi_2^b(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{P}}=0\tag{14}$$

$$\{\phi_2^a(\boldsymbol{x}),\phi_2^b(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{P}}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})gf_{abc}\,\phi_2^c(\boldsymbol{x})\tag{15}$$

と計算されるので，(13) の拘束条件はみな第1類拘束条件である。(15) を示すには，(11) で定義される“電荷密度” ρ^a も $\{\rho^a(\boldsymbol{x}),\rho^b(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{P}}=-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})gf_{abc}\,\rho^c(\boldsymbol{y})$ の Poisson 括弧を満たすことをいわなければならないが，$\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}$ から具体的につくってみれば容易に確かめられる。例えば，**5-1** の (38) のスカラー場なら

$$\rho^a_{\text{スカラー}}=ig(\pi_\varphi^\dagger T^a\varphi-\varphi^\dagger T^a\pi_\varphi)\tag{16}$$

[ただし $\pi_\varphi,\pi_\varphi^\dagger$ はそれぞれ $\varphi^\dagger,\varphi$ に共役な運動量変数] と計算され，T_a の交換関係 **5-1** (8) を使うとすぐ確かめられる。

前節で第1類拘束条件は一般に (局所) ゲージ変換を生成する母関数であると主張したが，この場合に (13) の拘束の任意な線形結合

$$G[\theta]=\int d^3x[\theta_1^a(\boldsymbol{x})\phi_1^a(\boldsymbol{x})+\theta_2^a(\boldsymbol{x})\phi_2^a(\boldsymbol{x})]\tag{17}$$

をつくって実際そうなっていることを確かめよう。今，量子化を行っている時刻を $x^0=t$ とし，4次元的変換パラメータを $\theta^a(x)$ として

$$\begin{aligned}\theta^a(x)|_{x^0=t}&=\theta_2^a(\boldsymbol{x}),\\ -\partial_0\theta^a(x)|_{x^0=t}&=\theta_1^a(\boldsymbol{x})+gf_{abc}A_0^b(\boldsymbol{x},t)\theta_2^a(\boldsymbol{x})\end{aligned}\tag{18}$$

を満たすものを持ってくれば，母関数 (17) は

$$G[\theta]=-\int d^3x[\pi^{a\mu}(x)D_\mu\theta^a(x)+\theta^a(x)\rho^a(x)]_{x^0=t}\tag{19}$$

と書ける。ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ との Poisson 括弧をとってみれば，$x^0=t$ で

$$\delta A_\mu^a(x)=\{G[\theta],A_\mu^a(x)\}_{\mathrm{P}}=D_\mu\theta^a(x)\tag{20}$$

$$\delta\pi^{a\mu}(x)=\{G[\theta],\pi^{a\mu}(x)\}_{\mathrm{P}}=gf_{abc}\,\pi^{b\mu}(x)\theta^c(x)\tag{21}$$

となり，確かにゲージ変換 **5-1** (36) を再現している。(21) は場の強さ $\pi^{a\mu}=F^{a\mu0}$ が随伴表現として斉次的に変換する [**5-1** (32)] ことを正しく表している。物質場についても，例えばスカラー場の (16) を使えば

$$\delta\varphi(x)=\{G[\theta],\varphi(x)\}_{\mathrm{P}}=ig\theta^a(x)T^a\varphi(x)\tag{22}$$

など **5-1** (36) を正しく再現していることがわかる。

量子化 まず，前節の第1類拘束条件の取扱い法の第一に述べた方法で量子化を行ってみよう。(13) の第1類拘束条件のそれぞれに対応して次のゲージ固定条件

$$\begin{aligned}\chi_1^a(\boldsymbol{x}) &\equiv A_0^a(\boldsymbol{x}) \approx 0,\\ \chi_2^a(\boldsymbol{x}) &\equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A}^a(\boldsymbol{x}) \approx 0\end{aligned} \tag{23}$$

を置く。この χ_i^a と (13) の ϕ_j^b の Poisson 括弧を計算すれば

$$\{\chi_i^a(\boldsymbol{x}), \phi_j^b(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix}\delta^{ab}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0\\ 0 & \nabla_x\cdot(\delta^{ab}\nabla_x - gf_{acb}\boldsymbol{A}^c(x))\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{pmatrix} \tag{24}$$

となり，ゲージ固定に要求される条件 **5-2** (66), $\det\{\chi, \phi\}_{\mathrm{P}} \neq 0$, は満たされている。

これで，(13) の ϕ_i^a と (23) の χ_i^a を合わせた条件は第2類拘束条件となったので，変数 $\boldsymbol{A}^a$ や $\boldsymbol{\pi}^a$ の間の Dirac 括弧を計算し，それから正準交換関係を設定すれば (23) のゲージ条件の下での量子化ができる。しかしながら，Coulomb (クーロン) ゲージと呼ばれるこのゲージ (23) は，相対論的に非共変で，Dirac 括弧を経由した交換関係も，(24) の中の演算子 $\nabla\cdot(\delta^{ab}\nabla - gf_{acb}\boldsymbol{A}^c)$ の逆が現れ，非局所的で非多項式のかなり複雑なものとなる。それゆえ，ここではこれ以上 Dirac 括弧を計算することはやめて，このゲージでの経路積分表式を調べ，そこから別の方策を探すことにする。

(13) の ϕ_i^a と (23) の χ_i^a を合わせた第2類拘束条件に対し **5-2** (67) が成り立つから，遷移振幅に対する経路積分表式 **5-2** (44) は，今の場合

$$\begin{aligned}T = \int &\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}A\,\mathscr{D}\pi_\varphi\,\mathscr{D}\varphi\;\Psi_{\mathrm{F}}^*\Psi_{\mathrm{I}}\prod_x\Big[\prod_a\delta(A_0^a(x))\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^a(x))\Big]\\ &\times\prod_x\Big[\prod_a\delta(\pi_0^a(x))\delta(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a(x)-\rho^a(x))\Big]\prod_t(\mathrm{Det}\,M)\\ &\times\exp i\int d^4x[\pi^{a\mu}\dot{A}_\mu^a + \pi_\varphi\dot{\varphi} - \widetilde{\mathscr{H}}(\pi, A, \pi_\varphi, \varphi)]\end{aligned} \tag{25}$$

となる。ただし $\mathrm{Det}\,M$ は3次元関数上の汎関数行列式であり，M は

$$M_{\boldsymbol{xy}}^{ab}(t) = \nabla_x\cdot(\delta^{ab}\nabla_x - gf_{acb}\boldsymbol{A}^c(x))\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{26}$$

である。(25) の $\mathscr{D}\pi\,\mathscr{D}A$ は $\prod_{a,\mu}\mathscr{D}\pi^{a\mu}\mathscr{D}A_\mu^a$ であり $\mathscr{D}\pi_\varphi\mathscr{D}\varphi$ は物質場の積分とする。まず，$\delta(A_0^a)\delta(\pi_0^a)$ があるから A_0^a, π_0^a 積分は自明にやってしまえる。次に，δ 関数の公式を用いて

$$\prod_{x,a}\delta(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a-\rho^a)=\int\mathcal{D}\lambda^a\exp i\int d^4x[\lambda^a(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\pi}^a-\rho^a)] \qquad (27)$$

と書き換え，この新しい積分変数 λ^a を“既に消した”ゲージ場の時間成分 A_0^a と書くことにする。その後に，(7) の $\tilde{\mathscr{H}}$ の形から Gauss 積分であることがわかる $\boldsymbol{\pi}^a$ および π_φ についての積分を行う。そうすれば，(25) は

$$T=\int\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\varphi\,\Psi_{\rm F}^*\Psi_{\rm I}\prod_{x,a}\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^a(x))\prod_t(\operatorname{Det}M)\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}(A,\varphi)\right] \qquad (28)$$

となる。ここで $\mathcal{L}$ は一番初めの Lagrangian 密度 (1) である。この表式 (28) が Coulomb ゲージ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}^a=0$ における経路積分の最終表式である。ここで相対論的に共変でないのはゲージ固定条件に関わる

$$\prod_{x,a}\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^a(x))\prod_t(\operatorname{Det}M) \qquad (29)$$

の部分だけになっていることに注意しよう。

Faddeev-Popov 行列式　(28) の表式において作用積分

$$S[A,\varphi]=\int d^4x\,\mathcal{L}(A,\varphi) \qquad (30)$$

は，**5-1** で与えたゲージ変換（行列記法で）

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^\theta(x)=\frac{i}{g}U(\theta(x))\partial_\mu U^{-1}(\theta(x))+U(\theta(x))A_\mu(x)U^{-1}(\theta(x))$$
$$\varphi \longrightarrow \varphi^\theta(x)=U(\theta(x))\varphi(x) \qquad (31)$$

の下で不変である。ここで θ はゲージ変換群の元 $\theta(x)\in G$ をいくぶん抽象的に表したもので $U(\theta(x))$ はそれに対応するユニタリー表現行列だということである。ある関数の組 (A_μ,φ) からゲージ変換 (31) でつながるすべての $(A_\mu^\theta,\varphi^\theta)$ は，θ を動かすにつれ，関数空間である軌跡を描くが，それをゲージ軌跡 (gauge orbit) と呼ぶ。作用積分 $S[A,\varphi]$ は，一つのゲージ軌跡上に乗るすべての関数 $(A_\mu^\theta,\varphi^\theta)$ に対して同一の値を与えるので，もし (28) の経路積分表式に (29) の δ 関数因子が存在しなければ，ゲージ変換 $\theta(x)$ の関数自由度ぶんだけ ∞ 重に数え過ぎが起こり，無限大の因子

$$\left[\int\prod_x d\theta(x)\right]\equiv\left[\int\mathcal{D}\theta\right] \qquad (32)$$

を含んでしまうことになる。したがって (29) の Coulomb ゲージの δ 関数 $\prod_{x,a}\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^a(x))$ は，各ゲージ軌跡上の関数から一つずつ代表元を選んでくる役割をしていて，(32) の無限大因子が現れるのを避けているのである。しかし，これは当然で，そもそもゲージ固定条件というのは，ゲージ軌跡

方向の運動を手で固定するもので，関数空間でゲージ軌跡を横断するある超曲面 (hyperplane) を指定するものであった。(29) のもう一つの因子 $\prod_t \mathrm{Det}\,M$ の役割は，この超曲面がゲージ軌跡を横切る“角度”が各ゲージ軌跡ごとに異なるので，それによる積分測度の非一様性を補償するもの，ということが推量されるが，実際にそうであることがすぐ後でわかる。

このように考えると，各ゲージ軌跡から一つずつ代表元を選び出すゲージ固定条件として，たとえば，相対論的に共変な

$$\partial^\mu A_\mu^a(x)=f^a(x), \qquad \text{行列記法で} \quad \partial^\mu A_\mu=f \tag{33}$$

をとってもよいはずだということになる。ここで $f^a(x)$ は全く任意に決めた c 数関数である。これをとり入れるために，Faddeev (ファデーフ) と Popov (ポポフ) に従って，次の量を定義する：

$$(\varDelta[A,f])^{-1}\equiv\int\mathcal{D}\theta \prod_{x,a}\delta(\partial^\mu A_\mu^\theta(x)-f(x)). \tag{34}$$

A_μ^θ は (31) のように A_μ から θ でゲージ変換したものであるから，この量 $\varDelta^{-1}[A,f]$ は A_μ と f の汎関数である。ここで経路積分測度 $\mathcal{D}\,\theta=\prod_x d\theta(x)$ の各点 x における $d\theta$ は群 G 上の不変測度と呼ばれるもので

$$\text{任意の}\ \theta'\in G\ \text{に対して}\quad d\theta=d(\theta\theta')=d(\theta'\theta) \tag{35}$$

を満たす。[実際に後に必要になるのは $d\theta$ の θ が単位元近傍のときの表式だけで，あらわな表式はそこで与える。] したがって

$$\mathcal{D}\theta=\mathcal{D}(\theta\theta')=\mathcal{D}(\theta'\theta) \tag{36}$$

である。この測度の不変性 (36) からただちに，(34) の量のゲージ不変性

$$\varDelta[A^\theta,f]=\varDelta[A,f] \tag{37}$$

が従う。(34) の右辺に $\varDelta[A,f]$ を掛算して 1 にしたものを，(28) の経路積分表式に掛けてみよう。そうすると，明白な $\Psi_{\rm F}^*\Psi_{\rm I}$ や $\prod_{x,a}$ などの記号は省略して

$$T=\int\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\varphi\ \delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\varDelta_M[\boldsymbol{A}]e^{iS[A,\varphi]}\cdot\int\mathcal{D}\theta\ \delta(\partial^\mu A_\mu^\theta-f)\varDelta[A,f] \tag{38}$$

となる。ただし，Det M の関数依存性を考慮して

$$\mathrm{Det}\,M=\varDelta_M[\boldsymbol{A}] \tag{39}$$

と書いた。(38) で積分順序を変更し，作用積分 $S[A,\varphi]$ と量 $\varDelta[A,f]$ のゲージ不変性を使えば

$$T=\int\mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\varphi\ \delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\varDelta_M[\boldsymbol{A}]\delta(\partial^\mu A_\mu^\theta-f)\varDelta[A^\theta,f]e^{iS[A^\theta,\varphi^\theta]}. \tag{40}$$

ここで，(A,φ) から $(A',\varphi')\equiv(A^\theta,\varphi^\theta)$ への変数変換を行う。このとき経路積分測度がゲージ不変なこと（演習問題 5.3 参照）

$$\mathcal{D}A=\mathcal{D}A',\qquad \mathcal{D}\varphi=\mathcal{D}\varphi' \tag{41}$$

および $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'^{\theta^{-1}}$ を使い，変数変換の後 A',φ' のプライムをはずせば

$$\begin{aligned}T&=\int\mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\varphi\;\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^{\theta^{-1}})\Delta_M[\boldsymbol{A}^{\theta^{-1}}]\delta(\partial^\mu A_\mu-f)\Delta[A,f]e^{iS[A,\varphi]}\\&=\int\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\varphi\left[\int\mathcal{D}\theta\;\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^\theta)\Delta_M[\boldsymbol{A}^\theta]\right]\delta(\partial^\mu A_\mu-f)\Delta[A,f]e^{iS[A,\varphi]}\end{aligned} \tag{42}$$

となる。ただし 2 行目で不変測度の性質 $d\theta=d(\theta^{-1})$ を用いた。

さて，ここで，(42) に現れている $\Delta[A,f]$ の評価を行おう。(42) では $\delta(\partial^\mu A_\mu-f)$ が存在しているから，この場合の A は $\partial^\mu A_\mu=f$ を満たしているもののみを考えれば充分である。そうすれば，(34) の定義式において $\mathcal{D}\theta$ 積分は $\theta=1$ の近傍のみが効いている。単位元の近傍で

$$\begin{aligned}\theta(x)&\simeq1+ig\theta^a(x)T_a\\(A^\theta)^a_\mu(x)&\simeq A^a_\mu(x)+(D_\mu\theta)^a(x)\end{aligned} \tag{43}$$

と書けること，それに，不変測度 $\mathcal{D}\theta$ が，($\mathrm{tr}(T_aT_b)=N\delta_{ab}$ なる直交基底をとっているとき)

$$\mathcal{D}\theta\simeq\prod_x\left(\prod_a d\theta^a(x)\right)\times(\text{定数}) \tag{44}$$

と与えられることを使って，(34) の定義式から

$$\begin{aligned}(\Delta[A,f])^{-1}&=\int\left(\prod_{x,a}d\theta^a(x)\right)\prod_{x,a}\delta[\partial^\mu D_\mu\theta^a(x)]\\&=\mathrm{Det}^{-1}(\partial^\mu D_\mu).\end{aligned} \tag{45}$$

すなわち，Δ は 4 次元関数上の汎関数行列式

$$\begin{aligned}\Delta[A,f]&=\mathrm{Det}\,N\\N^{ab}_{xy}&=\partial^\mu_x(\delta^{ab}\,\partial^x_\mu+gf_{acb}A^c_\mu(x))\delta^4(x-y)\end{aligned} \tag{46}$$

で与えられる。(45) で $\partial^\mu A_\mu=f$ なので f が消え，$\Delta[A,f]$ は ($\partial^\mu A_\mu=f$ を満たす A_μ に対しては) 実は f に依存しないという点が重要である。$\Delta[A,f]$ は結局 (46) のように行列式で書けることから Faddeev-Popov 行列式と呼ばれる。

(46) の $\mathrm{Det}\,N$ の形を見ると，(26) の M の行列式 $\mathrm{Det}\,M\equiv\Delta_M[\boldsymbol{A}]$ との類似性が歴然としている。実際，(34) と同様に Coulomb ゲージの場合に

$$(\Delta_{\mathrm{C}}[\boldsymbol{A}])^{-1}\equiv\int\mathcal{D}\theta\prod_{x,a}\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A}^\theta(x)) \tag{47}$$

を定義すれば，(37) と同様ゲージ不変性 $\varDelta_{\mathrm{C}}[\boldsymbol{A}^{\theta}]=\varDelta_{\mathrm{C}}[\boldsymbol{A}]$ が従い，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ を満たす $\boldsymbol{A}$ に対して上と同様にして

$$\varDelta_{\mathrm{C}}[\boldsymbol{A}]=\prod_t \mathrm{Det}\, M=\prod_t \varDelta_M[\boldsymbol{A}] \tag{48}$$

が示せる。[(26) の M の行列式 $\mathrm{Det}\, M$ は 3 次元的関数上の汎関数行列式であったことに注意。] (47), (48) および $\varDelta_M[\boldsymbol{A}]$ のゲージ不変性を使えば，(42) 式第 2 行の括弧でくくった $\mathscr{D}\theta$ 積分の部分は実は 1 であることがわかり，結局

$$T=\int \mathscr{D}A\,\mathscr{D}\varphi\ \Psi_{\mathrm{F}}^{*}\Psi_{\mathrm{I}} \prod_{x,a}\delta(\partial^{\mu}A_{\mu}^{a}(x)-f^{a}(x))\,\mathrm{Det}\, N\, e^{iS[A,\varphi]} \tag{49}$$

を得る。(28) の出発点の表式と比べると，共変的でない Coulomb ゲージの因子 (29) を，共変な $\delta(\partial^{\mu}A_{\mu}-f)\mathrm{Det}\, N$ に置き換えることに成功したことになる。

上の式変形では始・終状態の波動関数 Ψ_{F}^{*}, Ψ_{I} を省略していたので，明確ではなかったが，それらの波動関数もゲージ変換で不変であるときのみ上の導出が正しい，という点に注意しよう。しかしながら，物理的状態はゲージ不変であるので，物理的状態間の遷移振幅に関する限り (49) の表式が他のゲージと等価な正しい情報を与え，それで充分なのである。

Faddeev-Popov ゴースト (49) の表式をもう少し摂動計算に便利な形に書きかえよう。まず，上述のように遷移振幅 T は，始・終状態がゲージ不変な物理的状態である限り，もとの Coulomb ゲージの (28) と同じ量であり，したがって (49) の T は実は c 数関数 $f^{a}(x)$ に全く依存していない。それゆえ，(49) に，例えば次の Gauss 汎関数の積分

$$1=\int \mathscr{D}f \exp i\int d^4x\left[-\frac{1}{2\alpha}f^{a}(x)f^{a}(x)\right] \tag{50}$$

を掛け，積分の順序変更をし，(49) の δ 関数中の f^{a} を (50) の積分変数 f^{a} と同一視することが許される。そうすれば $\mathscr{D}f$ 積分がすぐできて，(49) は

$$T=\int \mathscr{D}A\,\mathscr{D}\varphi\ \Psi_{\mathrm{F}}^{*}\Psi_{\mathrm{I}}\,\mathrm{Det}\, N \exp i\int d^4x\left[\mathcal{L}(A,\varphi)-\frac{1}{2\alpha}(\partial^{\mu}A_{\mu}^{a})^2\right] \tag{51}$$

となる。この段階で指数部に現れた $(-1/2\alpha)(\partial^{\mu}A_{\mu}^{a})^2$ は QED の場合にゲージ固定項としてよく知られた Fermi 項の形をしている。勝手な定数 α はゲージ・パラメータと呼ばれる。ただ，ここでは，可換群 $U(1)$ に基づく QED の場合と異なり，Faddeev-Popov 行列式 $\mathrm{Det}\, N$ が現れている点が重要である。

(50) の代わりに，新しい変数 $B^a(x)$ を導入した形の

$$1=\int \mathcal{D}B\,\mathcal{D}f\exp i\int d^4x\left[B^a f^a+\frac{\alpha}{2}B^aB^a\right] \tag{52}$$

を使って上と同じ操作を行えば，T は (51) の代わりに

$$T=\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}B\,\mathcal{D}\varphi\,\Psi_{\mathrm{F}}^{*}\Psi_{\mathrm{I}}\,\mathrm{Det}\,N$$
$$\times\exp i\int d^4x\left[\mathcal{L}(A,\varphi)+B^a\partial^\mu A_\mu^a+\frac{\alpha}{2}B^aB^a\right] \tag{53}$$

となる。(52) で $\mathcal{D}B$ 積分を先に行えば前の (50) と同じものだから，もちろん, (53) も $\mathcal{D}B$ 積分を行えば (51) に帰着し, (51) と等価である。しかし, (53) において $B^a(x)$ は他の場 $A_\mu^a(x), \varphi(x)$ と同様に経路積分される補助的な場の役割をしており，以下の議論でもいろいろ有用な役割を果たすので，我々は (53) の形を以下使うことにする。補助場 $B^a(x)$ は QED の共変な正準型式をつくる際にその重要性を指摘した人の名をとって中西-Lautrup (ロートラップ) 場，略して NL 場と呼ばれる。

Faddeev-Popov 行列式 $\mathrm{Det}\,N$ の部分を，さらに摂動論で扱いやすくするため, 2 種の実 Grassmann 変数 $c^a(x)$, $\bar{c}^a(x)$ を導入して, (46) の表式を用いて,

$$\mathrm{Det}\,N=\int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\exp i\int d^4x[i\bar{c}^a(x)\partial^\mu D_\mu c^a(x)], \tag{54}$$

$$D_\mu c^a(x)\equiv\partial_\mu c^a(x)+gf_{abc}A_\mu^b(x)c^c(x), \tag{55}$$

と書き直す。c^a と $\bar{c}^a$ は，もし普通の実変数なら (54) の Gauss 積分が $\mathrm{Det}^{-1}N$ を与えてしまうから，Grassmann 数でなければならないのである。(54) の右辺は，あたかも $c^a(x)$ と $\bar{c}^a(x)$ が場であって，指数部がその作用積分を与えているような形になっている：その運動項は通常のスカラー場と同様な $i\bar{c}^a\Box c^a$ の形をしており，$gf_{abc}\bar{c}^a\partial^\mu(A_\mu^bc^c)$ の項はゲージ場 A_μ との相互作用を与える。しかし，このスカラー場 c^a, $\bar{c}^a$ は Grassmann 数であるから，Fermi 統計に従うという奇妙なものである。このような奇妙な “粒子” は，まず Feynman が Yang-Mills 場の 1 ループ・グラフのユニタリー性のために必要であることに気付き，続いて De Witt が任意の高次ループ・グラフに対して一般化したのだが，それを経路積分で初めて系統的に導いた人の名をとって **Faddeev-Popov ゴースト** (ghost)，略して FP ゴースト，と呼ばれる。

(53) と (54) をまとめると，結局，遷移振幅 T は

$$T=\int \mathscr{D}A\,\mathscr{D}B\,\mathscr{D}c\,\mathscr{D}\bar{c}\,\mathscr{D}\varphi\ \Psi_{\mathrm{F}}^{*}\Psi_{\mathrm{I}}\exp i\int d^4x\,\tilde{\mathcal{L}}(A,B,c,\bar{c},\varphi) \tag{56}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}(A,\varphi)+\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}(A,B)+\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}(c,\bar{c},A) \tag{57}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}=B^a\partial^\mu A_\mu^a+\frac{\alpha}{2}B^aB^a \tag{58}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}=i\bar{c}^a\partial^\mu D_\mu c^a(x) \tag{59}$$

で与えられることになる。量子論の全 Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ は，もとの (1) のゲージ不変な Lagrangian $\mathcal{L}$ に，ゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ と Faddeev-Popov 項 $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ とを加えたものになるわけである。

遷移振幅が (56) で与えられるということから，この共変ゲージにおける Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ の経路積分表式は

$$\begin{aligned} Z[J]&=\int \mathscr{D}A\,\mathscr{D}B\,\mathscr{D}c\,\mathscr{D}\bar{c}\,\mathscr{D}\varphi \exp i\int d^4x[\tilde{\mathcal{L}}+J\cdot\Phi] \\ J\cdot\Phi&\equiv J^{a\mu}A_\mu^a+J_i\varphi_i+\bar{J}_c{}^a c^a+J_{\bar{c}}{}^a\bar{c}^a+J_B{}^aB^a \end{aligned} \tag{60}$$

で与えられることがわかる。ただし，次のことに注意すべきである：一般に Green 関数，それゆえ $Z[J]$，はゲージ不変な量でなく，とっているゲージに依存する。上の (物理的状態間の) 遷移振幅 T の場合のように他のゲージとの等価性が示せるのは，Green 関数の含む物理的情報，例えば LSZ 簡約公式を適用して得られる物理的状態間の S 行列の値など，に関してのみである。このことは重要なので後の **5-11** で別途証明を与える。

5-4 BRS 対称性

前節で得られた共変ゲージでの経路積分表式に基づいて，非可換ゲージ理論は，'t Hooft (トフーフト) を初めとする人々により，くりこみ可能性やユニタリー性の証明，漸近的自由性の発見，など大きく発展させられた。その発展が一息ついた頃，Becchi (ベッキ)，Rouet (ルエ)，Stora (ストラ) の 3 人は，**5-3** の (57) の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ がある奇妙な変換の下で不変であることに気付いた。この変換はパラメータが Grassmann 数であり，2 回続けて行うと 0 になる (ベキ零性) という特殊な性質を持っているもので今日 BRS 変換と呼ばれている。

ゲージ理論の量子系の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ の BRS 対称性は非常に基本的なもので，歴史的にはそれに先行していたゲージ固定の方法，くりこみ可能性・ユニタリー性の証明など，ゲージ理論の構造全般に関して大変透徹し

た理解を与える。

そこで，ここでは，上のような理論の歴史的発展の順序を全く逆転して，局所ゲージ不変な古典論から出発して，まず，BRS 変換を構成し，次にそれに基づいてゲージ固定の手続きを行って，量子論的な Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ を得る，という順序で話をする。すなわち，出発点は，古典的場のゲージ変換とその下で不変な古典的 Lagrangian $\mathcal{L}$，であって，前節の Faddeev-Popov のゲージ固定処法や量子化の知識を全く前提にしない。むしろ，FP ゴースト場 c^a, $\bar{c}^a$ や中西-Lautrup (NL) 場 B^a なるものは，第1ステップの **BRS 変換の構成手続きによって**導入される。また，第2ステップの "BRS 変換に基づくゲージ固定処法" も実はもとの Faddeev-Popov のそれよりずっと一般的なものを与えることがわかる。もちろん，歴史的には，Faddeev-Popov の仕事なしに BRS 変換の発見はあり得なかったのであるけれども。

BRS 変換の構成 Yang-Mills 場の古典論，すなわち，5-3 (1) の古典的 Lagrangian $\mathcal{L}(A, \varphi)$ と場のゲージ変換 5-1 (36) を出発点とし，BRS 変換をどのように構成するか，その構成法をやや天下り的に与える。この構成法は，しかし，任意の局所ゲージ不変な系に対して適用できるもので，他の系への適用の仕方が明らかになるような形で述べよう。

i) まず，もともとのゲージ不変な Lagrangian, 5-3 (1) の $\mathcal{L}(A, \varphi)$, に現れているゲージ場 A_μ^a と物質場 φ_i に対して，BRS 変換は，もとの無限小ゲージ変換 5-1 (36) において，単にその変換パラメータ $\theta^a(x)$ を Grassmann 数パラメータ λ と FP ゴースト場 $c^a(x)$ の積で置き換え，

$$\theta^a(x) \longrightarrow \lambda c^a(x) \tag{1}$$

とすれば得られる。すなわち，

$$\delta_{\mathrm{B}}\varphi_i(x) = ig\lambda c^a(x)(T_a)_i{}^j\varphi_j(x), \tag{2}$$

$$\delta_{\mathrm{B}}A_\mu^a(x) = \lambda(\partial_\mu c^a(x) + gf_{abc}A_\mu^b(x)\,c^c(x)) = \lambda D_\mu c^a(x). \tag{3}$$

この天下り的構成法では，FP ゴースト場は (1) の手続きで導入されること，したがって，その個数や添字は一般に局所ゲージ変換のパラメータのそれに等しいこと，に注意しておこう†。Grassmann 数 λ が BRS 変換の

† 普通，変換パラメータ $\theta^a(x)$ は可換な c 数なので，(1) で λ が Grassmann 数だということは FP ゴースト $c^a(x)$ が Grassmann 奇の量であることを意味する。変換パラメータ θ^a 自身が Grassmann 数となる超対称ゲージ変換の場合は，逆に，その FP ゴースト場 $c^a(x)$ は Grassmann 偶の量となる。

大局的 (x によらない) 変換パラメータである。この変換パラメータ λ を省いた形の BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$，すなわち $\delta_{\mathrm{B}}=\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$，もしばしば有用で，行列記法 $C(x)=c^a(x)T_a$，$A_\mu=A_\mu^a(x)T_a$，を使って，

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi(x)=igC(x)\varphi(x) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu(x)=\partial_\mu C+ig[C(x), A_\mu(x)] \tag{5}$$

と与えられる。Grassmann 数 λ をはずしたので，この $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ は演算規則として，Grassmann 奇の量 (フェルミオン) を跳び越すときにマイナス符号が出ることに注意しよう：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(FG)=(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}F)G+(-)^{|F|}F\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}G \tag{6}$$

ii） 次に，(1) の手続きで導入された FP ゴースト場 $c^a(x)$ の BRS 変換は，物質場 φ_i やゲージ場 A_μ の上での 2 回 BRS 変換が 0 になるように決める。すなわち，φ_i や A_μ の上で**ベキ零性** $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2=0$ が成り立つことを要請する。例えば，物質場 φ_i の上でのベキ零性の要求は，(4) と (6) を使って

$$\begin{aligned}0=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi)&=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(igC\varphi)\\&=ig[(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C)\varphi-C\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi]=ig[\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C-C(igC)]\varphi\end{aligned} \tag{7}$$

となる。任意の物質場に対してこれが成立しなければならないから，FP ゴースト場の BRS 変換は

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C(x)=igC^2(x) \tag{8}$$

と決定される。これを $C(x)\equiv c^a(x)T_a$ の成分 $c^a(x)$ で表示すれば，c^a が反可換量であるから $C^2=c^ac^b(1/2)[T_a, T_b]=(i/2)f_{abc}c^ac^bT_c$ となることを使って，

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}c^a(x)=-\frac{1}{2}gf_{abc}c^b(x)c^c(x) \tag{9}$$

となる。

iii） 上では物質場上でのベキ零性 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2\varphi=0$ から FP ゴーストの BRS 変換則 (8) を導いたが，ゲージ場上でのベキ零性 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2A_\mu=0$ も同じ変換則 (8) で満たされていることが (5) を使って容易に確かめられる。もう一つ確認すべき自明でない点は，(8) で与えた FP ゴーストの変換則で果たして，ゴースト自身の上でのベキ零性 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2C=0$ が満たされているかということである。これも幸い次のように容易に確かめられる：(8) と (6) を使って，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C)&=ig\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(CC)\\&=ig[(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C)C-C\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}C]\\&=(ig)^2[C^2C-CC^2]=0.\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，もちろん，行列の掛算の結合律を使った†。

iv) 最後に，FP ゴースト場 $c^a(x)$ の 1 個 1 個に対応して反ゴースト (anti-ghost) 場 $\bar{c}^a(x)$ を導入し，その BRS 変換として NL 場 $B^a(x)$ (の i 倍) を定義する：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\bar{c}^a(x)=iB^a(x). \tag{11}$$

さらに，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2\bar{c}^a=0$ を要請すれば，NL 場 B^a の変換則が

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}B^a(x)=0 \tag{12}$$

と決まり，べキ零性 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2=0$ が新しい場 $\bar{c}^a, B^a$ の上でも成立することになる。

以上が BRS 変換の構成法のすべてである。この構成法より明らかに，BRS 変換はべキ零性を満たす：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2=0. \tag{13}$$

Lagrangian 段階でのゲージ固定処法 BRS 変換が構成されると，ゲージ不変な古典場の Lagrangian $\mathcal{L}(A,\varphi)$ に対して，次のように非常に簡単でかつ一般的なゲージ固定の処法を与えることができる。

まずゴースト場 c^a に $+1$，反ゴースト場 $\bar{c}^a$ に -1，を付与する加法的量子数 N_{FP} を定義し，ゴースト数と呼ぶことにする。(したがって，例えば cc や $\bar{c}c$ はゴースト数 N_{FP} がそれぞれ $+2, 0$ である。) 次に，ゴースト数が 0 であるような場の関数 $F^a(A,\varphi,c,\bar{c},B)$ を，ゲージ変換パラメータ θ^a の数と同じだけ任意に選び，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=-i\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(\bar{c}^aF^a) \tag{14}$$

をゲージ固定項プラス Faddeev-Popov 項としてもとのゲージ不変な Lagrangian $\mathcal{L}(A,\varphi)$ に加えるのである。これが今の BRS 変換に基づくゲージ固定処法のすべてである。

関数 F^a はゲージ固定関数 (gauge-fixing function) と呼ばれる。関数 F^a は全く任意といっても，もちろん，ゲージを完全に固定するようなものという制限がある。すなわち，もとのゲージ不変な Lagrangian $\mathcal{L}(A,\varphi)$ に (14) を加えた

$$\tilde{\mathcal{L}}(A,\varphi,c,\bar{c},B)=\mathcal{L}(A,\varphi)+\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}(A,\varphi,c,\bar{c},B) \tag{15}$$

が量子論における全 Lagrangian になるが，この $\tilde{\mathcal{L}}$ では局所ゲージ不変性

---

† 行列記法を用いず，(9) の成分表示を使ったとすると，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}^2c^a=0$ のチェックに構造定数 f_{abc} に対する Jacobi 恒等式 5-1 の (12) が必要となる。この恒等式も行列掛算の結合律の結果である。

がすべて失われていて，もはや第1類拘束条件を一つも導かない，というような F^a でなければならない。

一つの例として，ゲージ固定関数 F^a を

$$F^a = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a \qquad (\alpha：ゲージ・パラメータ) \tag{16}$$

ととってみよう。そうすれば，BRS 変換則 (3),(11),(12) を用いて，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}} &= -i\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\left[\bar{c}^a\left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a\right)\right] \\ &= B^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a B^a + i\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^a \end{aligned} \tag{17}$$

となり，ちょうど，前節 **5-3** の (58),(59) で与えたゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ と FP ゴースト項 $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ の和を再現する。一般にゲージ固定関数 F^a が FP ゴーストを全然含まない場合は，(14) の $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ が $\bar{c}^a$ にかかる部分と，F^a にかかる部分が，それぞれ，ゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ と，対応する FP ゴースト項 $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ とを与えることになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{GF}} &= B^a F^a(A, \varphi, B), \\ \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} &= i\bar{c}^a \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}[F^a(A, \varphi, B)]. \end{aligned} \tag{18}$$

以上の手続きが，**5-3** の最後に第1類拘束系の取扱いの2番目の方法としてあげた「Lagrangian 段階でのゲージ固定」の一般の系の場合の処法である。

このBRS変換の構成と，それに基づくゲージ固定処法に関して，重要な注意をいくつか述べよう：

i）BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ は，ゲージ固定を行う前に決められており，ゲージ固定条件によらない。

ii）ゲージ固定項 $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ と対応する FP ゴースト項 $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ は，両者ひとまとめにして，(14) で $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}} = \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(*)$ の形で与えられているので，その BRS 不変性は $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}$ のベキ零性 (13) から明白である：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}} = \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}[\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(*)] = 0. \tag{19}$$

一方，もとのゲージ場 A_μ と物質場 φ_i に対する BRS 変換 (2),(3) が $\theta^a(x) = \lambda c^a(x)$ を変換パラメータとする特殊なゲージ変換にすぎなかったということを思い起こせば，ゲージ不変な古典系 Lagrangian $\mathcal{L}(A, \varphi)$ も明らかに BRS 不変であることがわかる。したがって，上の手続きで得られる量子力学系の全 Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$，(15)，は自動的に BRS 変換の下で不変である：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\tilde{\mathcal{L}}=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{L}+\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=0. \tag{20}$$

すなわち，$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ を加えたことで $\mathcal{L}$ の持っていた(局所的な)ゲージ不変性は完全になくなったのだけれど，その代わり量子系 Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ は(大局的な) BRS 不変性を持つことになる。しかも，もともとあった場 A_μ と φ_i に関しては，BRS 変換は特殊な形のゲージ変換であるので，この意味で，**BRS 不変性は量子力学系のゲージ不変性である**，ということができる。

iii) ゲージ固定関数 F^a は，FP ゴースト場 $c^a, \bar{c}^a$ を含んでいてもよい。そのような場合，(14) の $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ はゴーストの 4 次の相互作用項 $\bar{c}\bar{c}cc$ を含むことになる。ところが前節で説明した Faddeev-Popov の処法では，FP ゴーストは Faddeev-Popov 行列式をゴーストの Gauss 積分に書き換えるトリック **5-3** (54) でのみ現れるので，そのような 4 次の相互作用項は決して現れ得ない。それゆえ，今のゲージ固定処法の方が，Faddeev-Popov のそれよりかなり一般的であることがわかる。

手で加える「ゲージ固定項＋FP ゴースト項」として $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(*)$ の形をとることには，上記 ii) とはまた別の重要な側面がある。それは次節で触れよう。

5-5 ゲージ場の正準量子化：共変な演算子型式

前節のように「Lagrangian 段階でゲージ固定」を行った BRS 不変な Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ がいったん構成されれば，今度はその $\tilde{\mathcal{L}}$ を出発点として，正準量子化の手続きにより，相対論的に共変なゲージで演算子型式 (operator formalism) のゲージ場の量子論を展開することができる。

正準量子化 ゲージ固定関数 F^a として **5-4** (16) をとる。そうすれば我々の出発点とすべき全系の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$，**5-4** (15)，は **5-3** (1) と **5-4** (17) より

$$\tilde{\mathcal{L}}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+\mathcal{L}_{\mathrm{matter}}(\varphi, D_\mu\varphi)+\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}+\mathcal{L}_{\mathrm{FP}} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}&=-\partial^\mu B^a\cdot A^a_\mu+\frac{\alpha}{2}B^aB^a,\\ \mathcal{L}_{\mathrm{FP}}&=-i\partial^\mu\bar{c}^a\cdot D_\mu c^a,\end{aligned} \tag{2}$$

と与えられる。ただし，便宜のため，$\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ と $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ では，**5-4** (17) の表式か

ら部分積分しておいた†。

正準(反)交換関係を設定すべく，共役運動量変数を計算する：

$$\pi^{a\mu}=\partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{A}_\mu^a=F^{a\mu 0}, \tag{3}$$

$$\pi_{\rm B}^a=\partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{B}^a=-A_0^a, \tag{4}$$

$$\pi_\varphi^i\equiv\partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{\varphi}_i, \tag{5}$$

$$\pi_c^a=\partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{c}^a=-i\dot{\bar{c}}^a, \tag{6}$$

$$\pi_{\bar{c}}^a=\partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{\bar{c}}^a=+i(\dot{c}^a+gf_{abc}A_0^bc^c). \tag{7}$$

ここでは，(3),(4) の (A_0^a, B^a) セクターのみが特異で，“一次” 拘束条件

$$\phi_1^a\equiv\pi_0^a\approx 0,\qquad \phi_2^a\equiv\pi_{\rm B}^a+A_0^a\approx 0 \tag{8}$$

を与えるが，他はすべて普通である。ゲージ固定項のなかった 5-3 初めの拘束条件 (6) とは異なり，この場合

$$\{\phi_1^a(\boldsymbol{x}),\phi_2^b(\boldsymbol{y})\}_{\rm P}=-\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\neq 0 \tag{9}$$

であり，$\phi_i^a=(\phi_1^a,\phi_2^a)$ は第 2 類拘束条件となる。したがって，これらの拘束条件の時間発展に対する無矛盾性の要求

$$\dot{\phi}_i^b(\boldsymbol{y})\approx\{\phi_i^b(\boldsymbol{y}),H+\int d^3\boldsymbol{x}(\phi_1^a(\boldsymbol{x})\lambda_1^a(\boldsymbol{x})+\phi_2^a(\boldsymbol{x})\lambda_2^a(\boldsymbol{x})\}_{\rm P}\approx 0 \tag{10}$$

も，単に未定係数 $\lambda_i^a(\boldsymbol{x})$ を決定する式となり，さらなる拘束条件は出ない。すなわち，第 1 類拘束条件が出ず，ゲージはうまく固定されているということである。Dirac 括弧の定義式 5-2 (26) に基づき，(A_0^a, B^a) セクターの Dirac 括弧を計算すれば，

$$\begin{aligned}&\{B^a(\boldsymbol{x}),-A_0^b(\boldsymbol{y})\}_{\rm D}\approx\{B^a(\boldsymbol{x}),\pi_{\rm B}^b(\boldsymbol{y})\}_{\rm D}\approx\delta^{ab}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\&\{A_0^a(\boldsymbol{x}),A_0^b(\boldsymbol{y})\}_{\rm D}\approx\{B^a(\boldsymbol{x}),B^b(\boldsymbol{y})\}_{\rm D}\approx 0,\end{aligned} \tag{11}$$

となる。ところが，この括弧式 (11) 自体は，(A_0^a, B^a) セクターで B^a のみを座標変数とみなし，(4) によって $-A_0^a$ は B^a に共役な運動量変数 $\pi_{\rm B}^a$ であるのでさらに A_0^a に共役な変数を求めることはしない，というやり方(簡便法)で求まる普通の Poisson 括弧と同じである。[一般に，Lagrangian に時間微分が一箇所 $Q\dot{q}$ の形でしか現れていない変数の組 (q, Q) に対し，q を座標変数，Q をそれに共役な運動量変数とみなす簡便括弧計算法が成り立ち，Dirac 流の面倒な Dirac 括弧の計算と同じ結果を与える。実は物質場の部分でも Dirac 場 ψ があれば，$(\psi, \psi^\dagger)$ に対して同じ事情が存在する

† これは $\mathcal{L}_{\rm GF+FP}=-i\boldsymbol{\delta}_{\rm B}[-\partial^\mu\bar{c}^a\cdot A_\mu^a+(\alpha/2)\bar{c}^aB^a]$ ととることに対応し，したがって依然 (2) の $\mathcal{L}_{\rm GF}+\mathcal{L}_{\rm FP}$ は BRS 不変である。

(演習問題 5.2 参照)。]

Poisson 括弧，または Dirac 括弧を $(-i$ 倍の$)$(反)交換関係に置き換える通常の量子化手続きに従って，演算子に対する次の正準(反)交換関係を得る：

$$[A_j^a(\boldsymbol{x},t),\pi^{bk}(\boldsymbol{y},t)]=i\delta^{ab}\,\delta_j^k\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\qquad (j,k=1,2,3) \tag{12}$$

$$[A_0^a(\boldsymbol{x},t),B^b(\boldsymbol{y},t)]=i\delta^{ab}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{13}$$

$$[\varphi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_\varphi^j(\boldsymbol{y},t)\}=i\delta_i^j\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{14}$$

$$\{c^a(\boldsymbol{x},t),\pi_c^b(\boldsymbol{y},t)\}=\{\bar{c}^a(\boldsymbol{x},t),\pi_{\bar{c}}^b(\boldsymbol{y},t)\}=i\delta^{ab}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{15}$$

その他の組合せはすべて可換または反可換である。物質場 φ_i に対して $[\ \ ,\ \ \}$ の記号を用いたのはボソンかフェルミオンかで交換関係または反交換関係を設定するという意味である。また(15)では FP ゴースト c^a および反ゴースト $\bar{c}^a$ に対してフェルミオンとして量子化すべく反交換関係を設定した。そして，c^a, $\bar{c}^a$ はすべての物質場のフェルミオンとも反可換という約束をとることにしておく†。

この $\tilde{\mathcal{L}}$ を持つ系はもはや特異系ではないから，(12)～(15)の正準(反)交換関係を用いて Heisenberg 方程式を求めてみれば，$\tilde{\mathcal{L}}$ から直接従う次の Euler-Lagrange 方程式と一致していることが容易にわかる：

$$D^\nu F_{\nu\mu}^a+gj_\mu^a=\partial_\mu B^a-igf_{abc}\,\partial_\mu\bar{c}^b\cdot c^c, \tag{16}$$

$$\partial^\mu A_\mu^a+\alpha B^a=0, \tag{17}$$

$$\partial^\mu D_\mu c^a=D^\mu\partial_\mu\bar{c}^a=0. \tag{18}$$

ただし，物質場のカレント j_μ^a は

$$\begin{aligned} j_\mu^a &\equiv g^{-1}\partial\mathcal{L}_{\text{matter}}/\partial A^{a\mu} \\ &=-i[\partial\mathcal{L}_{\text{matter}}/\partial(\partial^\mu\varphi_i)](T_a\varphi)_i \end{aligned} \tag{19}$$

で与えられる。[右辺 2 番目の等式は，$\mathcal{L}_{\text{matter}}$ に A_μ と $\partial_\mu\varphi$ は必ず共変微分 $D_\mu\varphi=(\partial_\mu-igA_\mu^aT^a)\varphi$ の組合せでのみ含まれているからである。]

ここで，今まではっきりとは述べなかった FP ゴースト場の hermite 性に関して注意しておこう。すなわち，c^a と $\bar{c}^a$ はともに hermite (実) 演算子であるとしなければならない：

$$c^{a\dagger}(x)=c^a(x),\qquad \bar{c}^{a\dagger}(x)=\bar{c}^a(x). \tag{20}$$

ゲージ場 A_μ^a や B^a も hermite 演算子とし，他の物質場 φ_i の hermite 性に

---

† 一般に対称性変換でつながらない 2 種のフェルミオン場の間では，Klein 変換と呼ばれる変換を用いて同時刻で可換にも反可換にもできる (演習問題 5.5 参照)。

関しては通常のものをとっておくことにする。そうすると，容易に確かめられるように，(2) のゴーストの Lagrangian $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$，したがって全系の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ が hermite になる：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}^{\dagger}=\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}, \qquad \tilde{\mathcal{L}}^{\dagger}=\tilde{\mathcal{L}}. \tag{21}$$

(20) の hermite 性の付与を強調するのは，1970 年代の長い間，(深い考慮なしに) FP ゴースト場は複素場で，ゴーストの hermite 共役は反ゴースト，反ゴーストの hermite 共役はゴースト，と間違って信じられてきたためである。実際，そのように FP ゴースト場を複素場と考えると $\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}^{\dagger}=\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}$ が成り立たないこと，したがって全系の Lagrangian が hermite (実) 演算子でなくなることが，やってみればすぐ確かめられる。全系の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ が hermite であることは理論のあらゆる所での無矛盾性にとって不可欠の条件であり，それなしに矛盾のない理論はあり得ない。

我々の FP ゴースト場に対する hermite 性のとり方 (20) の下では，問題なく Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ は hermite となっている。このことの最も重要な帰結は，全系の Hamiltonian H が hermite 演算子になり，それゆえ，系の時間発展の演算子 $U=e^{-iHt}$ がユニタリーになるということである。このことは特に，無限の過去の状態と無限の未来の状態の遷移を記述する S 行列演算子 S がユニタリーであることを意味している†：

$$S^{\dagger}S=SS^{\dagger}=1. \tag{22}$$

この条件が，後に述べる物理的 S 行列 S_{phys} のユニタリー性の証明の基礎となる。

BRS 電荷　前節に述べたように，(1) の $\tilde{\mathcal{L}}$ は BRS 不変である。BRS 変換は，意味上もとの局所ゲージ不変性の量子論的対応物であるが，変換パラメータが x^{μ} に依存しない Grassmann 数 λ であったので，一つの大局的変換である。したがって **1-3** で述べた Noether の定理によって，対応する保存カレント $J_{\mu}^{(\mathrm{B})}$ と電荷 $Q_{\mathrm{B}}=\int d^3x\, J_{\mu=0}^{(\mathrm{B})}$ が存在する。**1-5** の (6) の公式に従えば

† **3-2** では，漸近的完全性の仮定から形式的に S 行列のユニタリー性を導いたが，そもそも系の時間発展がユニタリーでないと，hermite 性の確定した漸近場 $\phi^{\mathrm{in}}, \phi^{\mathrm{out}}$ そのものが定義できなくなるのである。実際，Heisenberg 場の段階で，時刻 $t=0$ で hermite $\phi^{\dagger}(\boldsymbol{x},0)=\phi(\boldsymbol{x},0)$ であっても，別の時刻では $\phi(x)=e^{iHt}\phi(\boldsymbol{x},0)e^{-iHt}$ で，$\phi(x)$ と $\phi^{\dagger}(x)$ に簡単な関係がつかなくなる。$\phi(x)|_{x^0\to\pm\infty}$ で定義される漸近場も同様で，生成・消滅演算子さえ定義できるかどうかわからなくなる。

$$\lambda J_\mu^{(\mathrm{B})}=\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A_\nu^a)}\right]\lambda D^\nu c^a+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\varphi_i)}\right]ig\lambda c^a(T_a\varphi)_i$$
$$+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu c^a)}\right]\left(-\frac{1}{2}g\lambda f_{abc}c^bc^c\right)+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{c}^a)}\right]i\lambda B^a \tag{23}$$

となる。ただし，ここで変換パラメータ λ が Grassmann 数で符号に注意するため一時的に λ を保って書いた。微分はすべて右微分をとったので変化分 $\delta\varphi$ は右側に現れる。物質場カレントの定義 (19) と運動方程式 (16) を用い，λ を左側からはずしてやれば，

$$J_\mu^{(\mathrm{B})}=B^aD_\mu c^a-\partial_\mu B^a\cdot c^a+\frac{i}{2}g\partial_\mu\bar{c}^a\cdot(c\times c)^a-\partial^\nu(F_{\mu\nu}^ac^a) \tag{24}$$

なる簡単な表式を得る。ただし，群の添字 a を持つ 2 量 F^a, G^a に対し

$$(F\times G)^a\equiv f_{abc}F^bG^c \tag{25}$$

なる記号を一般に使うものとする。

対応する保存電荷

$$Q_\mathrm{B}=\int d^3x\left[B^aD_0c^a-\partial_0B^a\cdot c^a+\frac{i}{2}g\partial_0\bar{c}^a\cdot(c\times c)^a\right] \tag{26}$$

は，Noether 電荷の常として，もとの BRS 変換の生成子となる：

$$[i\lambda Q_\mathrm{B},\boldsymbol{\Phi}_I(x)]=\lambda\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\boldsymbol{\Phi}_I(x). \tag{27}$$

ここで $\boldsymbol{\Phi}_I$ は $A_\mu^a, \varphi_i, c^a, \bar{c}^a, B^a$ のすべての場を表し，$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\boldsymbol{\Phi}_I$ は前節で与えた BRS 変換 **5-4** の (2), (3), (9), (11), (12) である。Q_B は BRS 電荷または BRS 演算子と呼ばれる。

先に触れた FP ゴースト数 N_FP もこの系の保存量である。ただ普通のフェルミオン数の保存と少し異なり，対応する $\tilde{\mathcal{L}}$ の対称性は位相変換ではなく，次の**スケール変換**の下での不変性である：

$$c^a(x)\longrightarrow e^\rho c^a(x), \qquad (\rho：実数パラメータ) \tag{28}$$
$$\bar{c}^a(x)\longrightarrow e^{-\rho}\bar{c}^a(x) \tag{29}$$

これは，(20) で述べたように ゴースト場 c^a，$\bar{c}^a$ は hermite (実) であって位相という概念はあり得ないからである。(28), (29) の下での不変性に対応する Noether のカレントおよび電荷は

$$\begin{aligned}J_\mu^{(\mathrm{c})}&=i(\bar{c}^aD_\mu c^a-\partial_\mu\bar{c}^a\cdot c^a),\\ Q_\mathrm{c}&=i\int d^3x\,[\bar{c}^aD_0c^a-\partial_0\bar{c}^a\cdot c^a].\end{aligned} \tag{30}$$

FP ゴースト電荷と呼ぶことにするこの演算子 Q_c は，確かに (29) のスケール変換の生成子になっている：

$$[iQ_c, c^a(x)] = c^a(x), \qquad [iQ_c, \bar{c}^a(x)] = -\bar{c}^a(x). \tag{31}$$

この交換関係から，FP ゴースト数演算子 N_{FP} は，Q_c の i 倍

$$N_{FP} = iQ_c, \tag{32}$$

と同定される。おもしろいことに，FP ゴースト電荷 Q_c も上の BRS 電荷 Q_B もともに hermite 演算子，

$$Q_B^\dagger = Q_B, \qquad Q_c^\dagger = Q_c, \tag{33}$$

であるから，(31),(32) の関係式は，ゴースト数演算子 N_{FP} は**反 hermite** (純虚数) であるにかかわらず実数固有値 (c^a が $+1$, $\bar{c}^a$ が -1) を持つ，ということを意味している。このような奇妙なことが起こり得るのは，後であらわに見るように FP ゴーストの状態空間が不定計量を持つためである。

BRS 電荷 Q_B と FP ゴースト電荷 Q_c は，定義より，次の簡単な代数 (BRS 代数と呼ばれる) を満たすことがわかる：

$$\frac{1}{2}\{Q_B, Q_B\} = Q_B^2 = 0, \tag{34}$$

$$[iQ_c, Q_B] = Q_B, \tag{35}$$

$$[Q_c, Q_c] = 0. \tag{36}$$

Q_B^2 が 2 回連続 BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_B^2$ の生成子であることが,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_B^2 \boldsymbol{\Phi} &= \{iQ_B, [iQ_B, \boldsymbol{\Phi}]\} \\ &= -Q_B(Q_B\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}Q_B) - (Q_B\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}Q_B)Q_B = -[Q_B^2, \boldsymbol{\Phi}]\end{aligned} \tag{37}$$

(ここで $\boldsymbol{\Phi}$ をボソン場としたがフェルミオン場でも同様) からわかるので，(34) の $Q_B^2=0$, は前節 (13) で述べた BRS 変換の**ベキ零性**, $\boldsymbol{\delta}_B^2=0$, を表す。この (34) は，(26) で与えた Q_B の表式を使って次のように直接示すこともできる：

$$\begin{aligned}2iQ_B^2 &= \left\{iQ_B, \int d^3x\left(B^a D_0 c^a - \partial_0 B^a \cdot c^a + \frac{i}{2}g\partial_0 \bar{c}^a \cdot (c\times c)^a\right)\right\} \\ &= \int d^3x\left(-\partial_0 B^a \cdot \boldsymbol{\delta}_B c^a + \partial_0(\boldsymbol{\delta}_B \bar{c}^a)\cdot\frac{i}{2}g(c\times c)^a\right) = 0.\end{aligned} \tag{38}$$

ここで，$B^a = i^{-1}\boldsymbol{\delta}_B \bar{c}^a$，$D_\mu c^a = \boldsymbol{\delta}_B A_\mu^a$，$(c\times c)^a = (-g/2)^{-1}\boldsymbol{\delta}_B c^a$ の諸量は，$\boldsymbol{\delta}_B^2=0$ により BRS 不変であることを用いた。(35),(36) の交換関係は単に電荷演算子 Q_B, Q_c が FP ゴースト数 $N_{FP}=+1, 0$, をそれぞれ持つといっているだけである。

最後に BRS 変換のパラメータ λ は純虚 Grassmann 数であること，

$$\lambda^* = -\lambda, \tag{39}$$

をコメントしておこう。実際，任意の演算子 $\mathcal{O}$ と Grassmann 数 λ の積 $\lambda\mathcal{O}$ に対する hermite 共役演算の規則，$(\lambda\mathcal{O})^\dagger=\mathcal{O}^\dagger\lambda^*$，に注意すれば，(39) の理解の下で，すべての場 $\boldsymbol{\Phi}$ の hermite 性が BRS 変換後 $\boldsymbol{\Phi}'=\boldsymbol{\Phi}+\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\Phi}$ になっても保たれることが確かめられる。実際，例えば

$$(\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu)^\dagger=(\lambda D_\mu c^a)^\dagger=D_\mu c^a\lambda^*=-\lambda^* D_\mu c^a=-\lambda^*\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu^a \tag{40}$$

だから，$-\lambda^*=\lambda$ なら $\lambda\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu^a$ も A_μ^a と同様 hermite である。

物理的状態を選ぶ補助条件　一般にゲージ理論を共変ゲージで扱うと必ず負ノルムを持つ粒子が現れる。例えば，次節で説明するように，Feynman ゲージ $(\alpha=1)$ でのゲージ場 A_μ^a の自由場（または漸近場）の生成・消滅演算子 $a_\mu^{a\dagger}(\boldsymbol{k}), a_\mu^a(\boldsymbol{k})$ は，交換関係

$$[a_\mu^a(\boldsymbol{k}), a_\nu^{b\dagger}(\boldsymbol{q})]=-g_{\mu\nu}\,\delta^{ab}\,\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{41}$$

を満たす。Lorentz 不変性から右辺に Minkowski 計量 $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1)$ が現れるのだが，これは時間成分のゲージ粒子 $a_0^\dagger(f)|0\rangle\equiv\int d^3\boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k})a_0^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$（群の添字 a を省略）が負ノルムを持つことを意味している：

$$\begin{aligned}\langle 0|a_0(f)a_0^\dagger(f)|0\rangle&=\int d^3\boldsymbol{k}\,d^3\boldsymbol{q}\,f^*(\boldsymbol{k})f(\boldsymbol{q})\,\langle 0|a_0(\boldsymbol{k})a_0^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle\\&=\int d^3\boldsymbol{k}\,d^3\boldsymbol{q}\,f^*(\boldsymbol{k})f(\boldsymbol{q})(-\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}))\\&=-\int d^3\boldsymbol{k}\,|f(\boldsymbol{k})|^2<0.\end{aligned} \tag{42}$$

さらに，今の非可換ゲージ理論の場合には，FP ゴーストが存在し，それらも負ノルムを含み，スピンと統計の関係も壊すという奇妙な粒子である。

これらの明らかに非物理的な粒子が現れることを禁止し，“負の確率”の困難が生じない物理的に意味のある理論を得るためには，全状態空間 $\mathcal{V}$ の中から物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ をうまく選び出してやらなければならない。可換群 $U(1)$ に基づく QED の場合（その Lagrangian は，(1) の $\tilde{\mathcal{L}}$ で群の添字 a をなくし，構造定数 f_{abc} を 0 とし，FP ゴースト項を落としたもので与えられる）には，その昔，Gupta（グプタ）と Bleuler（ブロイラー）が，Feynman ゲージのとき，補助条件

$$(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{43}$$

をおいて物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}=\{|\mathrm{phys}\rangle\}$ を定義し，すべてうまくいくことを示した。肩の添字 $(+)$ は $\partial^\mu A_\mu$ 演算子の正振動数部分，すなわち，消

滅演算子部分を表す。中西と Lautrup は，Gupta-Bleuler 条件 (43) を

$$B^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle=0 \tag{44}$$

なる補助条件に置き換え，Feynman ゲージ以外でもうまくいくよう一般化した。NL 場 $B(x)$ の運動方程式 (17)，$\partial^\mu A_\mu+\alpha B=0$，の関係により，$\alpha=0$ [Landau (ランダウ) ゲージ] 以外では，中西-Lautrup 条件 (44) が Gupta-Bleuler 条件 (43) と等価であることがわかる。

しかしながら，これら GB 条件や NL 条件は可換群の場合しかうまくいかない。そもそも，正振動数 (消滅演算子) 部分，負振動数 (生成演算子) 部分の分離というものが自由場の場合しかうまく定義できないのである。一般の群の場合 $B^a(x)$ の満たす運動方程式は，(16),(18) より†

$$D^\mu\partial_\mu B^a-igf_{abc}\partial_\mu\bar{c}^{\,b}\cdot D^\mu c^c=0 \tag{45}$$

となるが，$U(1)$ 群の場合 $f_{abc}=0$ で添字 a がないので，自由場の方程式

$$\Box B(x)=0 \tag{46}$$

に帰着する。そのため，正・負振動数部分への分離が

$$B^{(+)}(x)=\int d^3\boldsymbol{k}\ g_{\boldsymbol{k}}(x)B(\boldsymbol{k}),\qquad B^{(-)}(x)=\int d^3\boldsymbol{k}\ g_{\boldsymbol{k}}^*(x)B^\dagger(\boldsymbol{k})$$
$$g_{\boldsymbol{k}}(x)\equiv e^{-ikx}/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0},\qquad k_0=|\boldsymbol{k}| \tag{47}$$

とできる。一般の非可換群の場合, $B(x)$ は (45) のように複雑な相互作用の影響があり，(47) のような分離ができない。それに，たとえ何らかの方法で正・負振動数部分を定義したとしても，ある時刻で補助条件 (44) を設定したとき，次の時刻でそれが成り立っていることが示せない。すなわち，GB-NL 条件は可換群以外の場合，時間発展と整合しないのである。

驚くべきことに，一般の非可換ゲージ理論の場合にも，物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ を定義する補助条件を見出すことができる。しかも, ある意味では可換群のそれより簡単な条件なのである。それは，上で導入した BRS 電荷 Q_{B} を用いて

$$Q_{\text{B}}|\text{phys}\rangle=0 \iff |\text{phys}\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}} \tag{48}$$

とするのである††。この条件は, BRS 変換が“量子論的ゲージ変換”であることから，直観的に言って,「物理的状態はゲージ不変である」ということを意味している。(48) は，実際，可換群の場合 NL 場 $B(x)$ [より正確には

---

† $D^\mu D^\nu F^a_{\nu\mu}=D^\mu j^a_\mu=0$ を用いる。単に $D^\mu\partial_\mu\bar{c}^{\,a}=0$ の BRS 変換 $\{Q_{\text{B}},D^\mu\partial_\mu\bar{c}^{\,a}\}=0$ でも出せる。

†† この補助条件 (48) は 1977 年，小嶋と筆者が初めて与えたものである。

$\int d^3x\ \Lambda(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 B(x)\ (\Box\Lambda(x)=0)]$ がゲージ変換の生成子であったことを想起すれば，GB-NL 条件 (44) と似ていることが了解されよう。

実は，単に似ているだけではなく，可換群 $U(1)$ の特殊事情の下では (48) の補助条件が GB-NL 条件 (44) を**再現する**ことを次のように示すことができる。今の我々の定式化は，ゲージ群がもちろん $U(1)$ でもよく，その場合でも FP ゴーストが入っているが，その運動方程式 (18) は自由場の

$$\Box c(x)=\Box\bar{c}(x)=0 \tag{49}$$

になる。しかも，(26) の BRS 電荷の表式も非常に簡単な

$$Q_{\mathrm{B}}=\int d^3x\ B(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 c(x)=i\int d^3\boldsymbol{k}[c^\dagger(\boldsymbol{k})B(\boldsymbol{k})-B^\dagger(\boldsymbol{k})c(\boldsymbol{k})] \tag{50}$$

となる。ここで $B^\dagger(\boldsymbol{k}), B(\boldsymbol{k})$ は (47) で定義した B 場の生成・消滅演算子で，$c^\dagger(\boldsymbol{k}), c(\boldsymbol{k})$ も ($\Box c(x)=0$ だから) 同様に定義したゴースト場 $c(x)$ のそれである。さらに FP ゴースト $c(x), \bar{c}(x)$ が自由場であることは，最初ゴースト粒子の存在しない状態から出発すれば永久に生成されないことを意味するので，系の状態空間をゴースト粒子を全然含まない部分空間

$$\mathcal{V}'\otimes|0\rangle_{\mathrm{FP}} \tag{51}$$

に限っても時間発展と矛盾しない。$|0\rangle_{\mathrm{FP}}$ は FP ゴースト・セクターの真空状態で，$\mathcal{V}'$ は通常の GB-NL 定式化で扱われる FP ゴースト以外の粒子で張られる状態空間である。したがって，GB-NL 定式化での物理的状態 $|\mathrm{phys}'\rangle$ は，我々の定式化では

$$|\mathrm{phys}'\rangle\otimes|0\rangle_{\mathrm{FP}} \tag{52}$$

に対応する。この形の状態 (52) に対しては，今の補助条件 (48) は，(50) の表式を用いて

$$Q_{\mathrm{B}}(|\mathrm{phys}'\rangle\otimes|0\rangle_{\mathrm{FP}})=i\int d^3\boldsymbol{k}\ B(\boldsymbol{k})|\mathrm{phys}'\rangle\otimes c^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle_{\mathrm{FP}}=0 \tag{53}$$

を与える。これは，$c^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle_{\mathrm{FP}}$ が $\boldsymbol{k}$ ごとに独立であることから，

$$\text{任意の}\ \boldsymbol{k}\ \text{に対し}\qquad B(\boldsymbol{k})|\mathrm{phys}'\rangle=0 \tag{54}$$

という条件に帰着する。ところが (54) は，(47) により，NL 条件 $B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}'\rangle=0$ に他ならない。

可換群の場合に，我々の 1 個の補助条件 $Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle=0$ が無限個の補助条件 $B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}'\rangle=0$ (任意の x に対して) を再現したのは，もちろんゴーストの存在しない状態 (52) に限ったからである。しかし，実のところ，可換群，

非可換群を問わず，補助条件は $Q_B|\text{phys}\rangle=0$ の1個だけでよく，それ以上に FP ゴーストがどういう状態かを指定する必要はないのである。**5-8** でこのことを一般的に証明する。

前節の最後に触れた，ゲージ固定項＋FP ゴースト項が $\mathcal{L}_{GF+FP}=\boldsymbol{\delta}_B(*)$ の形を持つことのもう一つの重要な側面，というのが今や明らかである。それは BRS 電荷 Q_B を使って

$$\mathcal{L}_{GF+FP}=\{iQ_B,\ *\} \tag{55}$$

の形に書ける[†]から，手で加えた $\mathcal{L}_{GF+FP}$ は $Q_B|\text{phys}\rangle=0$ を満たす物理的部分空間では実は**零演算子**であるということである。この事実が，後に物理的 S 行列がゲージ固定のとり方に依存しないという証明にも本質的役割を果たす。

"Maxwell" 方程式　ゲージ場 A_μ^a と物質場 φ_i に対して，もとの局所ゲージ変換のパラメータ $\theta^a(x)$ を x に依存しない定数 θ^a に置き換えた変換をし，NL 場 B^a, FP ゴースト場 c^a, $\bar{c}^a$ については随伴表現として変換させる大局的変換を，**大局的ゲージ変換** (global gauge transformation) または**カラー回転** (color rotation) と呼ぶ。(1) の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ はこの変換に対する不変性を持ち，対応する保存 Noether カレントは[††]

$$J_\mu^a=(A^\nu\times F_{\nu\mu})^a+j_\mu^a+(A_\mu\times B)^a-i(\bar{c}\times D_\mu c)^a+i(\partial_\mu\bar{c}\times c)^a \tag{56}$$

で与えられる。対応する電荷 $Q^a=\int d^3x\ J_{\mu=0}^a$ はカラー電荷 (color charge) と呼ばれ，大局的ゲージ変換の生成子となる：

$$\begin{aligned}&[i\theta^bQ^b,\ \Phi^a(x)]=(\theta\times\Phi(x))^a \qquad (\Phi=A_\mu, B, c, \bar{c})\\&[i\theta^bQ^b,\ \varphi_i(x)]=-i\theta^a(T^a)_i{}^j\varphi_j(x).\end{aligned} \tag{57}$$

この大局的ゲージ変換のカレント (56) を用いれば，ゲージ場の運動方程式 (16) が，次のような注目すべき形に書き換えられる：

$$\partial^\nu F_{\nu\mu}^a+gJ_\mu^a=\{Q_B, D_\mu\bar{c}^a\}. \tag{58}$$

この形から，補助条件 (48) を満たす任意の物理的状態 $|f_1\rangle, |f_2\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に対して，"古典的" な Maxwell 型の方程式

$$\langle f_1|(\partial^\nu F_{\nu\mu}^a+gJ_\mu^a)|f_2\rangle=0 \tag{59}$$

が成り立つことが従う。それで，(58) を "Maxwell" 方程式と呼ぶことに

---

† $\mathcal{L}_{GF+FP}$ が丸ごとなくなれば Q_B が演算子として定義できなくなるから，この話は $\mathcal{L}_{GF+FP}$ を少し変化させた場合，あるいは直観的な話と了解されたい。

†† 便宜のため，J_μ^a の中の物質場のカレント j_μ^a が ＋ の符号で入るよう，回転角 θ^a を $-\theta^a$ に変えた。

する。この "Maxwell" 方程式は，後の 6 章で議論する大局的ゲージ不変性の自発的破れとカラー閉じ込めの関係や，Weinberg (ワインバーグ)-Salam (サラム) 模型での電荷の普遍性の証明，などにおいて重要な役割を果たす。

大局的ゲージ不変性以外にも，$\tilde{\mathcal{L}}$ は (もし $\mathcal{L}_{\rm matter}(\varphi, D_\mu\varphi)$ がそうなら) 基本的な離散対称性 $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ を持っている。ここでは $\mathcal{CPT}$ 対称性のみに触れておこう。物質場 φ_i に対する $\mathcal{L}_{\rm matter}$ を不変にする $\mathcal{CPT}$ 変換に加えて，($\mathcal{CPT}\phi(x)\mathcal{T}^{-1}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{C}^{-1}=\phi^{\rm CPT}(x)$ と記して)

$$\begin{aligned} A_\mu^{a,{\rm CPT}}(x)&=-A_\mu^a(-x), & B^{a,{\rm CPT}}(x)&=B^a(-x), \\ c^{a,{\rm CPT}}(x)&=-c^a(-x), & \bar{c}^{a,{\rm CPT}}(x)&=\bar{c}^a(-x) \end{aligned} \tag{60}$$

を行えば (1) の $\tilde{\mathcal{L}}$ は不変となる。このとき，$Q_{\rm B}, Q_{\rm c}, Q^a$ が

$$Q_{\rm B}^{\rm CPT}=Q_{\rm B}, \qquad Q_{\rm c}^{\rm CPT}=-Q_{\rm c}, \qquad Q^{a,{\rm CPT}}=-Q^a \tag{61}$$

と変換することにも注意しておく。

FP 共役変換と反 BRS 対称性 Landau ゲージ ($\alpha=0$) の場合 $\partial^\mu A_\mu^a=0$ であるから，FP ゴーストと反ゴーストの運動方程式 (18) は，どちらも同じ形 $\partial^\mu D_\mu c^a=\partial^\mu D_\mu \bar{c}^a=0$ になる。それで，c^a と $\bar{c}^a$ の入れ換えに対する対称性があることが予想される。実際 $\alpha=0$ の場合，(2) の $\mathcal{L}_{\rm GF}+\mathcal{L}_{\rm FP}$ は

$$-\partial^\mu B^a\cdot A_\mu^a-i\partial^\mu\bar{c}^a\cdot D_\mu c^a=\partial^\mu\bar{B}^a\cdot A_\mu^a+i\partial^\mu c^a\cdot D_\mu\bar{c}^a \tag{62}$$

と書けることに注意する。ただし，$\bar{B}^a$ は次式で定義する：

$$B^a+\bar{B}^a=ig(c\times\bar{c})^a. \tag{63}$$

(62) から，Landau ゲージの Lagrangian が

$$\mathcal{C}_{\rm FP}: \qquad c^a\to\bar{c}^a, \qquad \bar{c}^a\to -c^a, \qquad B^a\to-\bar{B}^a \tag{64}$$

の変換に対して不変なことは明白である。ゲージ場や物質場は変換しないとする。この変換 $\mathcal{C}_{\rm FP}$ を FP 共役変換と呼ぶ。

BRS 電荷 $Q_{\rm B}$ の FP 共役変換 $\mathcal{C}_{\rm FP}Q_{\rm B}\mathcal{C}_{\rm FP}^{-1}$ を $\bar{Q}_{\rm B}$ と記し，反 BRS 電荷と呼ぼう。$\bar{Q}_{\rm B}$ の引き起こす変換，$[i\lambda\bar{Q}_{\rm B}, \Phi]\equiv\lambda\bar{\boldsymbol{\delta}}_{\rm B}\Phi$，は

$$[i\lambda\bar{Q}_{\rm B}, A_\mu^a]=\mathcal{C}_{\rm FP}[i\lambda Q_{\rm B}, A_\mu^a]\mathcal{C}_{\rm FP}^{-1}=\lambda\mathcal{C}_{\rm FP}D_\mu c^a\mathcal{C}_{\rm FP}^{-1}=\lambda D_\mu\bar{c}^a \tag{65}$$

のように計算できる。これを**反 BRS 変換**と呼べば，

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\delta}}_{\rm B}A_\mu^a&=D_\mu\bar{c}^a, & \bar{\boldsymbol{\delta}}_{\rm B}\varphi_i&=ig\bar{c}^aT_{ij}^a\varphi_j, \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}_{\rm B}c^a&=i\bar{B}^a, & \bar{\boldsymbol{\delta}}_{\rm B}\bar{c}^a&=-\frac{g}{2}(\bar{c}\times\bar{c})^a \end{aligned} \tag{66}$$

となる。Landau ゲージの場合，この反 BRS 変換が Lagrangian (1) の不変性であることは自明である。((62) の $\mathcal{L}_{\rm GF+FP}|_{\alpha=0}$ が $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\bar{\boldsymbol{\delta}}_{\rm B}(-iA_\mu^2/2)$ の形に書

けることにも注意。) が，大変おもしろいことに，実は**任意の α で**不変性が成立している。それは，$\bar{\boldsymbol{\delta}}_B B^a = g(B\times\bar{c})^a$ に注意して

$$B^aB^a = B^a[i\bar{\boldsymbol{\delta}}_B c^a + ig(c\times\bar{c})^a] = i\bar{\boldsymbol{\delta}}_B(B^ac^a) \tag{67}$$

と書けることから，$(\alpha/2)B^aB^a$ 項だけで反 BRS 不変だということがわかるからである。ここで，もちろん，反 BRS 変換 $\bar{\boldsymbol{\delta}}_B$ がベキ零性 $(\bar{\boldsymbol{\delta}}_B)^2=0$ を満たすことを使った。これはもとの BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_B$ のベキ零性と，$\bar{\boldsymbol{\delta}}_B$ の変換自体はゲージ・パラメータ α によらないこと，より明らかである。

反 BRS 変換まで含めた 拡大した BRS 代数は†

$$\{Q_B, Q_B\} = 2Q_B^2 = 0, \qquad \{\bar{Q}_B, \bar{Q}_B\} = 2\bar{Q}_B^2 = 0, \tag{68}$$

$$\{Q_B, \bar{Q}_B\} = 0 \tag{69}$$

$$[iQ_c, Q_B] = +Q_B, \qquad [iQ_c, \bar{Q}_B] = -\bar{Q}_B, \tag{70}$$

$$[Q_c, Q_c] = 0, \tag{71}$$

で与えられる。(69) の性質は BRS 変換と反 BRS 変換の反可換性

$$\boldsymbol{\delta}_B\bar{\boldsymbol{\delta}}_B = -\bar{\boldsymbol{\delta}}_B\boldsymbol{\delta}_B, \tag{72}$$

と等価で，すべての場の上で直接確かめられる。反 BRS 変換の存在は，種々の形式的な考察に便利なことも多いが，理論のユニタリー性などの本質的な議論には，BRS 変換か反 BRS 変換の一方のみで充分である。それゆえ，これ以降，もっぱら BRS 変換のみを考える。

5-6 Ward-高橋恒等式 および自由場の量子化と漸近場

この節では，ゲージ理論においてどのような漸近場が現れるのか，摂動論的仮定の下で調べる。そのため，まず，ゲージ (BRS) 不変性から従う，摂動の任意次数で成立する，Ward-高橋恒等式から述べよう。

Ward-高橋恒等式 一般にゲージ不変性に限らずある対称性が存在すると，種々な Green 関数，頂点関数，等の間にいろいろな関係式が成り立つ。そのような関係式を一般に Ward (ワード)-高橋恒等式，略して WT 恒等式と呼ぶ。

ゲージ不変性に関わる Green 関数に対する WT 恒等式は，すべて，BRS 演算子 Q_B を用いて，次のように簡単に与えることができる：すなわち，

† Landau ゲージの場合は，さらに対称性が存在し，より拡大した代数をなすことが知られている。

$\mathcal{O}_k(x)$ を任意の場(またはその多項式)の演算子として，真空の BRS 不変性 $Q_\mathrm{B}|0\rangle=0$ を用いて，

$$0=\langle 0|\{iQ_\mathrm{B},\mathrm{T}(\mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n))\}|0\rangle$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-)^{s_k}\langle 0|\mathrm{T}\,\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_{k-1}(x_{k-1})(\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\mathcal{O}_k(x_k))\mathcal{O}_{k+1}(x_{k+1})\cdots\mathcal{O}_n(x_n)|0\rangle \tag{1}$$

なる恒等式を得る。ただし，$s_k\equiv\sum_{i=1}^{k-1}|i|$ で，$|i|$ は $\mathcal{O}_i$ の統計指数である。

一粒子既約(1PI)な頂点関数，あるいはその生成汎関数，に対する WT 恒等式を得るには次のようにやる。まず，すべての場 Φ_I とその BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\Phi_I$ に対して外場(external source)を導入する:

$$\mathcal{S}[J,K]=\int d^4x\Big[J^{a\mu}A^a_\mu+J^i\varphi_i+\bar{J}_c{}^a c^a+J_{\bar{c}}{}^a\bar{c}^a+J_B{}^a B^a$$
$$+K^{a\mu}D_\mu c^a+iK_i c^a gT^a_{ij}\varphi_j-\frac{1}{2}K_c{}^a g(c\times c)^a\Big]. \tag{2}$$

ここで場は皆 Heisenberg 場であり，$\bar{J}_c{}^a, J_{\bar{c}}{}^a, K^{a\mu}$ は Grassmann 数の，$J^{a\mu}$, $J_B{}^a, K_c{}^a$ は普通の数の，c 数外場である。(物質場 φ_i がボソンなら，K^i は Grassmann 数，J^i は普通の数，フェルミオンなら逆である。) BRS 変換量 $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\Phi_I$ は，もはや BRS 不変であるから，

$$\{iQ_\mathrm{B},D_\mu c^a\}=\{iQ_\mathrm{B},c^a(T^a\varphi)_i\}=[iQ_\mathrm{B},(c\times c)^a]=0 \tag{3}$$

であり，したがって次式が成り立つ:

$$0=\langle 0|[iQ_\mathrm{B},\mathrm{T}\exp i\mathcal{S}[J,K]]|0\rangle$$
$$=i\int d^4x\langle 0|\mathrm{T}\Big(J^{a\mu}D_\mu c^a+i(-)^{|i|}J_i(c^a gT^a\varphi)_i$$
$$+\frac{1}{2}\bar{J}_c{}^a g(c\times c)^a-iJ_{\bar{c}}{}^a B^a\Big)\exp i\mathcal{S}[J,K]|0\rangle. \tag{4}$$

4-5 でやったように，連結 Green 関数に対する生成汎関数 $W[J,K]$，および 1PI 頂点関数に対する生成汎関数 $\Gamma[\Phi,K]$ を

$$\exp iW[J,K]\equiv\langle 0|\mathrm{T}\exp i\mathcal{S}[J,K]|0\rangle, \tag{5}$$
$$\Gamma[\Phi,K]\equiv W[J,K]-J_I\cdot\Phi_I, \tag{6}$$
$$\Phi_I(x)\equiv(\delta/\delta J_I(x))W[J,K]=\frac{\langle 0|\mathrm{T}\Phi_I(x)e^{i\mathcal{S}}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{T}e^{i\mathcal{S}}|0\rangle}, \tag{7}$$

で定義する。ただし，J_I は $J^{a\mu}, J^i, \bar{J}_c{}^a, J_{\bar{c}}{}^a, J_B{}^a$ のすべてを表す一般的記号とし，(7) で定義される Γ の引数 Φ_I は c 数で，対応する Heisenberg 場

$\Phi_I = A_\mu^a, \varphi_i, c^a, \bar{c}^a, B^a$ と同じ記号で表すが混同しないよう。(6) および以下において，ドット・は積分記号 $\int d^4x$ の省略とする。そうすれば (4) の恒等式は，

$$\left(J^{a\mu}\cdot\frac{\delta}{\delta K^{a\mu}}+(-)^{|i|}J^i\cdot\frac{\delta}{\delta K^i}-\bar{J}_c{}^a\cdot\frac{\delta}{\delta K_c{}^a}-iJ_{\bar{c}}{}^a\cdot\frac{\delta}{\delta J_B{}^a}\right)W[J,K]=0 \tag{8}$$

と書ける。(6) の Legendre 変換から従う (7) に双対な関係式 4-5 (7)

$$(\delta/\delta\Phi_I(x))\Gamma[\Phi,K]=-(-)^{|I|}J_I(x) \tag{9}$$

および，

$$(\delta/\delta K_I(x))W[J,K]=(\delta/\delta K_I(x))\Gamma[\Phi,K] \tag{10}$$

を用いれば，(8) は

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}+\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a}\cdot\frac{\delta\Gamma}{\delta K_c^a}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\cdot B^a=0 \tag{11}$$

を導く。これが 1PI 頂点関数の生成汎関数 Γ に対する WT 恒等式で，Grassmann 数による微分はすべて左微分である。

Γ の NL 場 B^a や反ゴースト場 $\bar{c}^a$ への依存性は特殊で，運動方程式 5-5 (17), (18) から従う次の恒等式を満たす：

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B^a}=\partial^\mu A_\mu^a+\alpha B^a, \tag{12}$$

$$\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}=0. \tag{13}$$

例えば，(13) は，次のように導かれる。$D_0c^a=-i\pi_{\bar{c}}^a$ と同時刻で (反) 可換でないのは (2) の外場項の中で $\bar{c}^a$ のみであって，5-5 (15) より

$$\{D_0c^a(\boldsymbol{x},t),\ \bar{c}^b(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{14}$$

を満たすので，

$$\begin{aligned}
&\partial^\mu\langle 0|\mathrm{T}\ D_\mu c^a(x)e^{iS[J,K]}|0\rangle\\
&\quad=i\int d^4y\ \delta(x_0-y_0)\langle 0|\mathrm{T}[D_0c^a(x),\ J_{\bar{c}}{}^b(y)\ \bar{c}^b(y)]e^{iS}|0\rangle\\
&\qquad\qquad+\langle 0|\mathrm{T}\,\partial^\mu D_\mu c^a(x)e^{iS}|0\rangle\\
&\quad=\langle 0|\mathrm{T}(-iJ_{\bar{c}}{}^a(x)+\partial^\mu D_\mu c^a(x))e^{iS}|0\rangle
\end{aligned} \tag{15}$$

が従う。5-5 の (18) のゴースト Heisenberg 場の運動方程式 $\partial^\mu D_\mu c^a(x)=0$ により最後の項は落ちるから，(15) は，

$$\partial^\mu(\delta W/\delta K^{a\mu}(x))=-iJ_{\bar{c}}{}^a(x) \tag{16}$$

と書け，(9),(10) を用いれば Γ に対する (13) となる。(12) も同様に，Heisenberg 場の方程式 $\partial^\mu A_\mu^a+\alpha B^a=0$ と同時刻交換関係 **5-5** (13) から従う。Γ に対する WT 恒等式 (11)，および (12),(13) の恒等式は，後のゲージ理論のくりこみ可能性の議論において特に重要な役割を果たす。

ユニタリー性に関連して大切な Green 関数 WT 恒等式は

$$\langle 0|\mathrm{T}B^a(x)B^b(y)|0\rangle=\langle 0|\{Q_{\mathrm{B}},\mathrm{T}(B^a(x)\bar{c}^b(y))\}|0\rangle=0, \tag{17}$$

$$\langle 0|\mathrm{T}A_\mu^a(x)B^b(y)|0\rangle-i\langle 0|\mathrm{T}D_\mu c^a(x)\bar{c}^b(y)|0\rangle$$
$$=\langle 0|\{Q_{\mathrm{B}},\mathrm{T}(A_\mu^a(x)\bar{c}^b(y))\}|0\rangle=0, \tag{18}$$

である。一方，運動方程式 $\partial^\mu D_\mu c^a=0$ および反交換関係 (14) より (15) と同様にして [あるいは (15) を $\delta/\delta J_{\bar{c}}{}^b(y)$ 微分して $J=K=0$ とおけば]

$$\partial_x^\mu\langle 0|\mathrm{T}D_\mu c^a(x)\bar{c}^b(y)|0\rangle=\delta^{ab}\delta^4(x-y) \tag{19}$$

が得られるから，(18) の WT 恒等式は

$$\text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}D_\mu c^a(x)\bar{c}^b(y)|0\rangle=i\delta^{ab}p_\mu/p^2, \tag{20}$$

$$\text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}A_\mu^a(x)B^b(y)|0\rangle=-\delta^{ab}p_\mu/p^2, \tag{21}$$

を導くことになる。ただし F.T. は Fourier 変換 $\int d^4x\, e^{ip(x-y)}$ を演算する意である。(20),(21) は，ゲージ理論にどんな物質場が含まれていようと常に成立する厳密な恒等式であって，Heisenberg 演算子 A_μ^a, B^a, $D_\mu c^a$, $\bar{c}^a$ のチャネルには必ず**零質量の粒子** (漸近場) が存在することを表している。この意味については次々節で詳しく述べよう。

自由場の量子化　今まで，ベクトル場や，Fermi 統計に従うスカラー場の量子化は議論してこなかったので，ここでその議論を与え，それらの粒子の Fock 空間の計量構造を明らかにしておこう。

まず，Lagrangian **5-5** (1) の相互作用項を落とした自由場の部分 $\tilde{\mathcal{L}}_0$ を見る：

$$\tilde{\mathcal{L}}_0=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a)^2-\partial^\mu B^a\cdot A_\mu^a+\frac{\alpha_{\mathrm{r}}}{2}B^aB^a-i\partial^\mu\bar{c}^a\cdot\partial_\mu c^a \tag{22}$$

物質場の部分は今興味がないので落とした。下で説明するように，この Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}_0$ は摂動論におけるくりこまれた Heisenberg 場の**漸近場**の振舞い (運動方程式と交換関係) を記述する Lagrangian でもある。そのとき α_{r} はくりこまれたゲージ・パラメータで，初めの “裸” のパラメータ α とは異なる。

(22) の $\tilde{\mathcal{L}}_0$ で記述される自由場の運動方程式は,

$$\Box A_\mu^a - \partial_\mu(\partial^\nu A_\nu^a) = \partial_\mu B^a, \tag{23}$$

$$\partial^\mu A_\mu^a + \alpha_r B^a = 0, \tag{24}$$

$$\Box c^a = \Box \bar{c}^a = 0, \tag{25}$$

であり，同時刻交換関係は **5-5** の (12), (13), (15) と同様にして

$$[A_j^a(\boldsymbol{x}, t), \dot{A}_k^b(\boldsymbol{y}, t)] = i\delta^{ab}\delta_{jk}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \qquad (j, k=1, 2, 3) \tag{26}$$

$$[A_0^a(\boldsymbol{x}, t), B^b(\boldsymbol{y}, t)] = i\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{27}$$

$$-\{c^a(\boldsymbol{x}, t), \dot{\bar{c}}^b(\boldsymbol{y}, t)\} = \{\bar{c}^a(\boldsymbol{x}, t), \dot{c}^b(\boldsymbol{y}, t)\} = \delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{28}$$

で与えられる。(23) と (24) から

$$\Box A_\mu^a = (1-\alpha_r)\partial_\mu B^a, \qquad \Box B^a = 0 \tag{29}$$

が従い，これは $\alpha_r \neq 1$ では A_μ^a が零質量 Klein-Gordon 方程式 $\Box A_\mu^a = 0$ を満たさず，□を 2 回演算して初めて $\Box^2 A_\mu^a = 0$ を満たすことをいっている。一般に $\Box\phi \neq 0$ で $\Box^2\phi = 0$ を満たす場 ϕ を dipole (ダイポール) 場と呼ぶ。ゲージ・パラメータ $\alpha_r = 1$ のゲージを Feynman ゲージ，$\alpha_r = 0$ を Landau ゲージと呼ぶが，(29) はしたがって，Feynman ゲージ以外ではゲージ場 A_μ^a に dipole 成分が現れることを示している。dipole が現れる場合 (特に Landau ゲージは理論的には美しい) にも以下の分析は少し複雑になるが本質的には同様にやれるので，ここでは，簡単のため，以下 Feynman ゲージ $\alpha_r = 1$ の場合に話を限ろう。

Feynman ゲージでは，したがって，すべての場が単純な零質量場

$$\Box A_\mu^a = \Box c^a = \Box \bar{c}^a = 0, \qquad B^a = -\partial^\mu A_\mu^a \tag{30}$$

となり，(26), (27) の同時刻交換関係も簡単に

$$[A_\mu^a(\boldsymbol{x}, t), \dot{A}_\nu^b(\boldsymbol{y}, t)] = -i\delta^{ab}g_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{31}$$

とまとまる。そうすれば，A_μ^a も c^a も $\bar{c}^a$ も，単に零質量のスカラー場と同じ形の交換関係，運動方程式を満たすことになるから，**2-1** の (11), (14) 等の結果からただちに

$$A_\mu^a(x) = \int d^3\boldsymbol{k}\,[a_\mu^a(\boldsymbol{k})g_{\boldsymbol{k}}(x) + a_\mu^{a\dagger}(\boldsymbol{k})g_{\boldsymbol{k}}^*(x)] \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} c^a(x) \\ \bar{c}^a(x) \end{pmatrix} = \int d^3\boldsymbol{k}\left[\begin{pmatrix} c^a(\boldsymbol{k}) \\ \bar{c}^a(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} g_{\boldsymbol{k}}(x) + \begin{pmatrix} c^{a\dagger}(\boldsymbol{k}) \\ \bar{c}^{a\dagger}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} g_{\boldsymbol{k}}^*(x)\right] \tag{33}$$

$$g_{\boldsymbol{k}}(x) \equiv \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}, \qquad k_0 \equiv |\boldsymbol{k}| \tag{34}$$

と展開され，これら生成・消滅演算子が，(28), (31) より

$$[a^a_\mu(\boldsymbol{k}), a^{b\dagger}_\nu(\boldsymbol{q})] = -g_{\mu\nu}\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}), \tag{35}$$

$$\{c^a(\boldsymbol{k}), \bar{c}^{\,b\dagger}(\boldsymbol{q})\} = -\{\bar{c}^{\,a}(\boldsymbol{k}), c^{b\dagger}(\boldsymbol{q})\} = i\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}), \tag{36}$$

(他はすべて可換または反可換) の交換関係を満たすことがわかる。さらに，4 次元交換関係，Feynman 伝播関数についても，自由スカラー場の結果 **2-1** (25), (32) を見れば，

$$\begin{aligned}&[A^a_\mu(x), A^b_\nu(y)] = -i\delta^{ab}g_{\mu\nu}D(x-y),\\ &\{c^a(x), \bar{c}^{\,b}(y)\} = -\delta^{ab}D(x-y),\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}A^a_\mu(x)A^b_\nu(y)|0\rangle = -\delta^{ab}g_{\mu\nu}D_F(x-y),\\ &\langle 0|\mathrm{T}c^a(x)\bar{c}^{\,b}(y)|0\rangle = i\delta^{ab}D_F(x-y),\end{aligned} \tag{38}$$

となることは明らかであろう。ただし零質量の不変デルタ関数 Δ, Δ_F を特に D, D_F と記した：

$$\begin{aligned}&D(x) = \Delta(x;\ m^2=0)\\ &D_F(x) = \Delta_F(x;\ m^2=0) = \int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{(-k^2-i\epsilon)}.\end{aligned} \tag{39}$$

(32) の展開による生成・消滅演算子 $a^{a\dagger}_\mu(\boldsymbol{k}), a^a_\mu(\boldsymbol{q})$ の交換関係 (35) は前節 **5-5** (41) ですでに引用したものであるが，後の物理的モード・非物理的モードの議論の際には，Lorentz 添字 μ を直接使うより横波，縦波，スカラー波という偏極成分に分解する方がよい。まず，進行方向 $\boldsymbol{k}$ に直交する平面に偏極している横波の独立な二つの偏極ベクトル $\varepsilon^{(\pm)}_\mu(\boldsymbol{k})$ としてヘリシティ $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ の ±1 の固有ベクトルを選ぼう：

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{(\pm)\mu}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = 0,\\ &\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)*}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}) = 1, \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)*}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\mp)}(\boldsymbol{k}) = 0.\end{aligned} \tag{40}$$

この 3 次元ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ のあらわな表式は，例えば，$\boldsymbol{k}$ が z 軸を向いているとき ($\boldsymbol{k}\,/\!/\,\boldsymbol{e}_z$)，次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(+)}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ +i\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{(-)}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix}. \tag{41}$$

他の二つの独立な偏極ベクトルを

$$\varepsilon^{(\mathrm{L})\mu}(\boldsymbol{k}) = -ik^\mu = -i(|\boldsymbol{k}|, \boldsymbol{k}), \tag{42}$$

$$\varepsilon^{(\mathrm{S})\mu}(\boldsymbol{k}) = i\bar{k}^\mu/2|\boldsymbol{k}|^2 \equiv i(|\boldsymbol{k}|, -\boldsymbol{k})/2|\boldsymbol{k}|^2, \tag{43}$$

と選び，それぞれ，縦波モード (longitudinal mode)，スカラーモード (scalar mode) と呼ぶことにする。これら都合四つの偏極ベクトル $\varepsilon^{(\sigma)}_\mu(\boldsymbol{k})$

$(\sigma=\pm, \mathrm{L}, \mathrm{S})$ は次の直交性・完全性を満たしている：

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\mu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{k})\varepsilon^{(\tau)\mu}(\boldsymbol{k})=-\tilde{\eta}^{\sigma\tau}, \\ &\sum_{\sigma,\tau}\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})\tilde{\eta}^{\sigma\tau}\varepsilon_\nu^{(\tau)*}(\boldsymbol{k})=-g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{44}$$

ただしここで導入した“計量” $\tilde{\eta}^{\sigma\tau}$ は

$$\tilde{\eta}^{\sigma\tau}=\begin{array}{c} \\ + \\ - \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{S} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & \mathrm{L} & \mathrm{S} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}=(\tilde{\eta}^{-1})^{\sigma\tau} \tag{45}$$

である。この偏極ベクトル $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})$ を用いて (32) の展開の代わりに

$$\begin{aligned} &A_\mu^a(x)=\int d^3\boldsymbol{k}\sum_{\sigma=\pm,\mathrm{L},\mathrm{S}}[a^a(\boldsymbol{k},\sigma)f_{\boldsymbol{k},\mu}^{(\sigma)}(x)+a^{a\dagger}(\boldsymbol{k},\sigma)f_{\boldsymbol{k},\mu}^{(\sigma)*}(x)] \\ &f_{\boldsymbol{k},\mu}^{(\sigma)}(x)\equiv\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}, \qquad k_0=|\boldsymbol{k}| \end{aligned} \tag{46}$$

として各モードの生成・消滅演算子 $a^{a(\dagger)}(\boldsymbol{k},\sigma)$ $(\sigma=\pm,\mathrm{L},\mathrm{S})$ を定義することにする。そうすれば，(35) の交換関係は (44) を用いて

$$[a^a(\boldsymbol{k},\sigma), a^{b\dagger}(\boldsymbol{q},\tau)]=\tilde{\eta}^{\sigma\tau}\delta^{ab}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \tag{47}$$

と書き換えられる。この (47) から，(45) で導入した $\tilde{\eta}^{\sigma\tau}$ は各モードに対応した 1 粒子状態の計量を与えていることがわかる。すなわち，横波状態 $a^{a\dagger}(\boldsymbol{k},\pm)|0\rangle$ は正の内積を持ち，縦波・スカラーモードの状態は反対角な計量を持っている。FP ゴーストの生成・消滅演算子の交換関係 (36) も反対角な計量構造を持っており，このような反対角計量は負ノルムや零ノルムの状態が含まれていることを意味している。例えば，(群の添字 a を略して)

$$\begin{aligned} &|\mathrm{LS}(\boldsymbol{p})\rangle\equiv[a^\dagger(\boldsymbol{p},\mathrm{L})-a^\dagger(\boldsymbol{p},\mathrm{S})]|0\rangle \\ &|\mathrm{FP}(\boldsymbol{p})\rangle\equiv[c^\dagger(\boldsymbol{p})+i\bar{c}^\dagger(\boldsymbol{p})]|0\rangle \end{aligned} \tag{48}$$

などは負ノルム $\langle\mathrm{LS}(\boldsymbol{p})|\mathrm{LS}(\boldsymbol{q})\rangle=\langle\mathrm{FP}(\boldsymbol{p})|\mathrm{FP}(\boldsymbol{q})\rangle=-2\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ の状態であり，縦波・スカラー状態 $a^\dagger(\boldsymbol{p},\mathrm{L})|0\rangle, a^\dagger(\boldsymbol{p},\mathrm{S})|0\rangle$，ゴースト状態 $c^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle, \bar{c}^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$, それぞれは零ノルム状態である。その他多粒子状態にも負・零ノルム状態があり，したがって，系の Fock 空間は不定計量空間 (indefinite metric space) となる。後に我々は，正定値計量を持つ横波モード以外, すなわち, 縦波・スカラーモードおよび FP ゴーストモードはすべて非物理的モードで，$Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle=0$ で指定される物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に本質的には現れない，ということを証明する。

(46) で導入した偏極平面波関数 $f^{(\sigma)}_{\boldsymbol{k},\mu}(x)$ は, (34) のスカラー平面波 $g_{\boldsymbol{k}}(x)$ と

$$
\begin{aligned}
f^{(\mathrm{L})}_{\boldsymbol{k},\mu}(x) &= \partial_\mu g_{\boldsymbol{k}}(x), \\
\partial^\mu f^{(\sigma)}_{\boldsymbol{k},\mu}(x) &= \delta^{\sigma \mathrm{S}} g_{\boldsymbol{k}}(x),
\end{aligned}
\tag{49}
$$

の関係を満たすように構成されていることに注意したい。そのため, 例えば, (46) 第1式の ∂^μ をとれば

$$
-B^a(x) = \partial^\mu A^a_\mu(x) = \int d^3\boldsymbol{k}\, [a^a(\boldsymbol{k},\mathrm{S}) g_{\boldsymbol{k}}(x) + a^{a\dagger}(\boldsymbol{k},\mathrm{S}) g^*_{\boldsymbol{k}}(x)] \tag{50}
$$

の簡単な表式になり, スカラーモードの生成・消滅演算子 $a^{a(\dagger)}(\boldsymbol{k},\mathrm{S})$ はその名の通りスカラーの NL 場 $B^a(x)$ の生成・消滅演算子 $B^{a(\dagger)}(\boldsymbol{k})$ (のマイナス) と一致することになる：

$$
a^a(\boldsymbol{k},\mathrm{S}) = -B^a(\boldsymbol{k}). \tag{51}
$$

形式的摂動論における漸近場 上で触れたように, (22) の自由場 Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}_0$ は, 純粋 Yang-Mills 理論の摂動論におけるくりこまれた Heisenberg 場の漸近場の振舞いを記述している。このことを, ここで示しておこう。相互作用の入った Heisenberg 場 $A^a_\mu(x)$, $c^a(x)$, $\bar{c}^a(x)$ に対する 2 点 Green 関数は, 一般に Lorentz 不変性とカラー (大局的ゲージ変換) 不変性から

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T} A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)|0\rangle \\
&\qquad = \frac{1}{i}\delta^{ab}\left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{p^2 F(p^2)} + \alpha\frac{p_\mu p_\nu}{p^4}\right]
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$$
\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T} c^a(x)\bar{c}^b(y)|0\rangle = \frac{1}{i}\delta^{ab}\left[\frac{-i}{p^2 G(p^2)}\right] \tag{53}
$$

の形をとる。[他の組合せ $\langle 0|\mathrm{T} A^a_\mu c^a|0\rangle$ などはゴースト数保存則からすべて 0 である。] ここで $F(p^2)$, $G(p^2)$ はダイナミクスで決まるスカラー関数で, 摂動論の第 0 次の自由場の段階では上の (38) で見たように $F(p^2) = G(p^2) = 1$ である。(52) の $p_\mu p_\nu/p^4$ 比例項が $\alpha p_\mu p_\nu/p^4$ の形に決まっているのは, (52) に $\partial/\partial y_\nu$ を演算したとき, A^a_μ と A^b_ν の同時刻可換性より

$$
\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T} A^a_\mu(x)\partial^\nu A^b_\nu(y)|0\rangle = ip^\nu \cdot i^{-1}\delta^{ab}\alpha\frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \tag{54}
$$

となって, これが運動方程式 5-5 (17), $\partial^\nu A^b_\nu = -\alpha B^b$, の関係により恒等式 (21) の $-\alpha$ 倍を再現しなければならないからである。したがって (52) の α は裸のゲージ・パラメータである。

摂動論では, $F(p^2)$, $G(p^2)$ の自由場のときの値 1 からのずれはごく小さ

いと考えるので，(52),(53) における自由場のときの $p^2=0$ での pole ($1/p^2$, および dipole $1/p^4$) は，留数の微小な変化を別として，存在し続けることになる。**3-2** (13) で注意したように，漸近場の 2 点関数は Heisenberg 場の 2 点関数の 1 粒子 pole 部分で与えられる。それゆえ，まだ規格化していない漸近場 $\tilde{\phi}^{\text{as}}$ を

$$A_\mu(x) \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} \tilde{A}_\mu^{\text{as}}(x), \qquad (\text{as}=\text{out}, \text{in})$$
$$c(x) \longrightarrow \tilde{c}^{\text{as}}(x), \qquad \bar{c}(x) \longrightarrow \tilde{\bar{c}}^{\text{as}}(x), \tag{55}$$

(ただし群の添字 a はしばらく省略する) で定義すれば，(52),(53) の $p^2=0$ での 1 粒子 pole 部分をとり出して，

$$\text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\tilde{A}_\mu^{\text{as}}(x)\tilde{A}_\nu^{\text{as}}(y)|0\rangle$$
$$=\frac{1}{i}Z_3\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{p^2}-K\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}+\alpha_{\mathrm{r}}\frac{p_\mu p_\nu}{p^4}\right] \tag{56}$$
$$\text{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\,\tilde{c}^{\text{as}}(x)\,\tilde{\bar{c}}^{\text{as}}(y)|0\rangle=\frac{1}{i}\tilde{Z}_3\left[\frac{-i}{p^2}\right]$$

を得る。ここで $Z_3, K, \tilde{Z}_3$ は，$F^{-1}(p^2), G^{-1}(p^2)$ を $p^2=0$ まわりで Taylor 展開した

$$F^{-1}(p^2)=Z_3(1+Kp^2)+O(p^4),$$
$$G^{-1}(p^2)=\tilde{Z}_3+O(p^2), \tag{57}$$

で定義される定数である。(56) に現れる α_{r} は先に述べたくりこまれたゲージパラメータで裸のそれ α と

$$\alpha=Z_3\alpha_{\mathrm{r}} \tag{58}$$

の関係で結びついている。実際に摂動のループ・グラフを評価すると $F(p^2)$ や $G(p^2)$ は，$(\ln p^2)^n$ のような項を含み，$Z_3=F^{-1}(p^2=0)$ や $\tilde{Z}_3=G^{-1}(p^2=0)$ は無限大の発散量となる。これは通常の場の理論の発散——紫外発散 (ultraviolet divergence)——をくりこみ操作で除いた後も残る，零質量粒子の存在に起因する発散で赤外発散 (infrared divergence) と呼ばれる。非可換ゲージ理論は特に強い赤外発散が現れ，零質量粒子描像に基づく摂動論はその理由で通常信用されない。しかし，ここでは，これらの赤外発散を避ける何らかのゲージ不変な正則化の処法をとっていると仮定し，**形式的**な議論を続けることにする。[実際，我々の今の主目的の物理的 S 行列のユニタリー性の証明のためには，局所ゲージ不変性に由来する BRS 不変性のみが本質的であって，ここで展開する形式的議論は，例え

ば後に出会う赤外発散の問題の全くない「対称性が自発的に破れた非可換ゲージ理論のモデル」でも，ほとんどそのまま当てはまるのである。]

(56) の第 1 式における $1/p^4$ の dipole は $(\alpha_r-1)p_\mu p_\nu/p^4$ の形で現れているので，確かに前に述べたようにくりこまれたゲージ・パラメータ α_r を 1 とする Feynman ゲージをとればなくなる。そこで，以後 Feynman ゲージ $\alpha_r=1$ をとることにし，くりこまれた漸近場を

$$\widetilde{A}_\mu^{\rm as}=Z_3^{1/2}A_\mu^{\rm as}, \qquad (\tilde{c}^{\rm as},\ \tilde{\bar{c}}^{\rm as})=\widetilde{Z}_3^{1/2}(c^{\rm as},\ \bar{c}^{\rm as}) \tag{59}$$

で定義すれば，(56) の 2 点関数は (39) の D_F を用いて

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{T}A_\mu^{\rm as}(x)A_\nu^{\rm as}(y)|0\rangle&=-(g_{\mu\nu}+K\partial_\mu^x\partial_\nu^y)D_F(x-y),\\ \langle 0|\mathrm{T}c^{\rm as}(x)\bar{c}^{\rm as}(y)|0\rangle&=iD_F(x-y)\end{aligned} \tag{60}$$

となる。$A_\mu^{\rm as}$, $c^{\rm as}$, $\bar{c}^{\rm as}$ はすべて自由場であるから，自由スカラー場のときと同様，この式で D_F を iD で置き換えるだけで，4 次元交換関係

$$\begin{aligned}[A_\mu^{\rm as}(x), A_\nu^{\rm as}(y)]&=-i(g_{\mu\nu}+K\partial_\mu^x\partial_\nu^y)D(x-y),\\ \{c^{\rm as}(x),\ \bar{c}^{\rm as}(y)\}&=-D(x-y),\end{aligned} \tag{61}$$

を得ることになる。

次に，Heisenberg 場の方程式 $\partial^\mu A_\mu+\alpha B=0$ が，くりこまれた漸近場とくりこまれたゲージ・パラメータ $\alpha_r=Z_3^{-1}\alpha$, (58), で書いても同じ形の

$$\partial^\mu A_\mu^{\rm as}+\alpha_r B^{\rm as}=0 \tag{62}$$

となるように，NL 場 $B(x)$ の漸近場を

$$B(x) \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} Z_3^{-1/2}B^{\rm as}(x) \tag{63}$$

で定義しよう。[A_μ の $A_\mu \to Z_3^{1/2}A_\mu^{\rm as}$ とは逆数のくりこみになっていることに注意。] そうすると，(21) や (17) の恒等式も漸近場で書いて同じ形になり，したがって，(60) から (61) を出したのと同様にして

$$[A_\mu^{\rm as}(x), B^{\rm as}(y)]=-i\partial_\mu D(x-y), \tag{64}$$

$$[B^{\rm as}(x), B^{\rm as}(y)]=0, \tag{65}$$

が導かれる。(65) により $B^{\rm as}(x)$ どうしは可換であるから $A_\mu^{\rm as}$ を $\partial_\mu B^{\rm as}$ に比例した項だけシフトして

$$A_\mu'^{\rm as}\equiv A_\mu^{\rm as}-\frac{K}{2}\partial_\mu B^{\rm as} \tag{66}$$

と定義し直しても，(64) は不変にとどまることに注意しよう。しかし，このときの係数 $-K/2$ の K を，(61) の K と同じにとっておけば，(61) の $A_\mu^{\rm as}$ の交換関係は，(64) を用いて

$$[A'^{\rm as}_\mu(x), A'^{\rm as}_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu}D(x-y) \tag{67}$$

と簡単化される。

Yang-Mills 漸近場 $A'^{\rm as}_\mu$ の 4 次元交換関係 (67) および FP ゴースト漸近場 $c^{\rm as}$, $\bar{c}^{\rm as}$ のそれ (61) 第 2 式は，群の添字 a, b を復活させれば，(22) の自由場の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}_0$ から求めた (37) とちょうど一致し，それゆえ，運動方程式も $\Box A'^{\rm as}_\mu = \Box c^{\rm as} = \Box \bar{c}^{\rm as} = 0$ (また $\Box B^{\rm as} = \Box A^{\rm as}_\mu = 0$ でもある) が従い[†]，(62) とともに，$\tilde{\mathcal{L}}_0$ から出る (24), (25), ($\alpha_r = 1$ の) (29) を再現している。以上で漸近場の系が $\tilde{\mathcal{L}}_0$ で記述される自由場の系と同等であることの証明を終わった。[(61) 第 1 式の交換関係で満足すれば (66) の再定義は必ずしも必要でない。普通 A_μ の漸近場というときには (66) の $A'^{\rm as}_\mu$ ではなく，$A_\mu \to Z_3^{1/2} A^{\rm as}_\mu$ で定義される $A^{\rm as}_\mu$ を指すことにする。]

5-7 摂動論の Feynman 則と簡単な計算

補助条件 $Q_{\rm B}|\text{phys}\rangle = 0$ で指定される物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys} = \{|\text{phys}\rangle\}$ に限った S 行列——$S_{\rm phys}$ と呼ぶ——がユニタリーであることを，次節および次々節で摂動論によらずかなり一般的に証明する。そのような一般論に入る前に，この節では，摂動論の Feynman 則を与え，少し具体的な振幅の計算をする。この具体的計算は，Feynman グラフに慣れると同時に，非可換ゲージ理論の Fock 空間の計量構造や WT 恒等式の意味を理解する上でも役に立つだろう。

Feynman 則 話をあらわにすべく，5-5 (1) で与えた Lagrangian で，物質場の部分を Dirac 場 ψ にとって[††]

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA^a_\mu T^a) - m]\psi$$

$$-\partial^\mu B^a \cdot A^a_\mu + \frac{\alpha}{2}B^a B^a - i\partial^\mu \bar{c}^a \cdot D_\mu c^a \tag{1}$$

を全系の Lagrangian としよう。ゲージ固定項と FP ゴースト項を既に含むこの $\tilde{\mathcal{L}}$ を“古典論”の Lagrangian とみなして出発すれば，5-5 でやっ

---

† 漸近場の運動方程式は 4 次元交換関係から一意的に求まる。例えば $\Box A'^{\rm as}_\mu = 0$ をいうには，$\Box A'^{\rm as}_\mu$ なる演算子がすべての漸近場と可換であることをいえばよい。また $\Box B^{\rm as} = 0$ だから (62) は $A^{\rm as}_\mu$ でも $A'^{\rm as}_\mu$ でも成立する。

†† ψ が群 G の可約表現に属する場合は，質量 m は各既約セクターごとに異なる値 (各セクター内では共通の値) をとる対角行列と考える。

たように (自明な) 第 2 類拘束条件 **5-5** (8) しか出ない。それゆえ，遷移振幅 T の位相空間経路積分表式は，**5-2** (44) の公式が適用できて

$$T=\int \mathcal{D}\pi\mathcal{D}A\mathcal{D}\pi_B\mathcal{D}B\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\pi_c\mathcal{D}\pi_{\bar{c}}\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}$$
$$\times\bar{\Psi}_{\rm F}^*\Psi_{\rm I}\prod_{x,a}[\delta(\pi_0^a)\delta(\pi_B^a+A_0^a)]$$
$$\times\exp i\int d^4x[\pi^{a\mu}\dot{A}_\mu^a+\pi_B{}^a\dot{B}^a+i\psi^\dagger\dot{\psi}+\pi_c{}^a\dot{c}^a+\pi_{\bar{c}}{}^a\dot{\bar{c}}^a-\mathcal{H}] \qquad (2)$$

となる。ただし $\det^{\frac{1}{2}}|\{\phi_\alpha,\phi_\beta\}_{\rm P}|$ の因子は **5-5** (9) より本質的には 1 であることを用いた。ここで，$\mathcal{D}\pi_0^a, \mathcal{D}\pi_B^a$ 積分を実行し δ 関数を落とし，さらに $\mathcal{D}\pi_j^a, \mathcal{D}\pi_c{}^a, \mathcal{D}\pi_{\bar{c}}{}^a$ を遂行すれば，exp の肩の上はちょうど (1) の $\tilde{\mathcal{L}}$ の作用積分 $i\int d^4x\,\tilde{\mathcal{L}}$ となる。したがって，この系の Green 関数生成汎関数 $Z[J]$ は

$$Z[J]=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}B\mathcal{D}\psi^*\mathcal{D}\psi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}$$
$$\times\exp i\int d^4x[\tilde{\mathcal{L}}(A,B,\psi^*,\psi,c,\bar{c})+J\cdot\Phi] \qquad (3)$$
$$J\cdot\Phi\equiv J^{a\mu}A_\mu^a+J_B{}^aB^a+\bar{\eta}\psi+\eta\bar{\psi}+\bar{J}_c{}^ac^a+J_{\bar{c}}{}^a\bar{c}^a$$

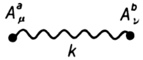
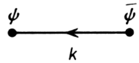
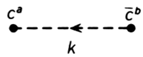
で与えられることになり，Faddeev-Popov の方法で求めた **5-3** (60) の経路積分表式を再現する。

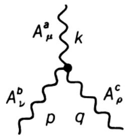
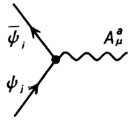
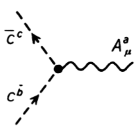
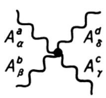
この表式 (3) よりただちに，**4** 章で行ったのと同様にして，摂動論の Feynman 則を導くことができる。利用の便宜のために，この非可換ゲージ理論における (運動量表示の) Feynman 則，特に Feynman 伝播関数，頂点，のグラフ則を表 1 にまとめておこう。

表 1 において，Dirac 場や FP ゴーストの線につけてある矢印は，$\bar{\psi}$ から ψ へ，$\bar{c}$ から c への方向を表し，運動量の向きとは無関係であることに注意しておこう。[たまたま，表 1 の伝播関数ではそれを一致させたのだが。] ゲージ場の伝播関数の中の $\alpha_{\rm r}$ は，くりこまれたゲージ・パラメータで，実際計算ではもっぱら Feynman ゲージ $\alpha_{\rm r}=1$ をとる。また頂点関数では，運動量の向きをすべて頂点から流れ出る方向にとった。(この場合，運動量 k の場の x-依存性は e^{+ikx} で，$\mathcal{L}_{\rm int}$ の中の微分 ∂_μ は ik_μ として読みとればよい。)

外線に関しては，運動量表示の Green 関数 $\tilde{G}^{(n)}$ を計算するときは，表 1 の伝播関数の $1/i$ 倍を付与し，不変振幅 $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}$ の計算のときは，スカラー場は 1，Dirac 場は $u(\boldsymbol{p},s)$, $\bar{u}(\boldsymbol{p},s)$ など，ベクトル場は $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{p})$, $\varepsilon_\mu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{p})$ を

表 1　非可換ゲージ理論の Feynman 則

伝播関数(内線)	
	$\delta^{ab}\dfrac{1}{k^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu}-(1-\alpha_{\rm r})\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$
	$\dfrac{1}{m-\not{k}-i\epsilon}$
	$\delta^{ab}\dfrac{i}{-k^2-i\epsilon}$

頂　点(運動量はすべて頂点から出ていく方にとる)	
	$igf_{abc}[g_{\mu\nu}(k-p)_\rho+g_{\nu\rho}(p-q)_\mu+g_{\rho\mu}(q-k)_\nu]$
	$g(T^a)_i{}^j\gamma_\mu$
	$gf_{abc}k_\mu$
	$-g^2f_{eab}f_{ecd}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$ $-g^2f_{eac}f_{ebd}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta})$ $-g^2f_{ead}f_{ebc}(g_{\alpha\beta}g_{\delta\gamma}-g_{\alpha\gamma}g_{\delta\beta})$

付与する。その他，ループ積分は $\int d^4l/i(2\pi)^4$，など，**4-3** (38), **4-4** (46), **4-6** (22) で与えた規則を適用する。

ここで，ベクトル場の偏極状態の散乱振幅に関して，少しまぎらわしい

点の注意を与えておこう。それは，ベクトル場の偏極ベクトル $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})$ ($\sigma=\pm, \mathrm{L}, \mathrm{S}$) の間の内積 $\tilde{\eta}^{\sigma\tau}$ が，5-6 (45) で与えたように，縦波 (L)-スカラー波 (S) セクターで反対角になっているところからくる。すなわち，このため，5-6 (46) で定義した消滅演算子 $a_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k}, \sigma)$ を漸近場 $A_\mu^{\mathrm{as}}(x)$ から取り出す公式は

$$
\begin{aligned}
a_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k}, \sigma) &= \tilde{\eta}^{\sigma\tau}(-i)\int d^3x\, f^{(\tau)*\mu}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 A_\mu^{\mathrm{as}}(x) \\
&= \tilde{\eta}^{\sigma\tau}(-i)\int d^3x\, \varepsilon^{(\tau)*\mu}(\boldsymbol{k})[e^{ikx}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_\mu^{\mathrm{as}}(x)]/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

となり，したがって，3-3 (10) の LSZ 公式は

$$
\begin{aligned}
&\langle\alpha\, \mathrm{out}|a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}, \sigma)|\beta\, \mathrm{in}\rangle - \langle\alpha\, \mathrm{out}|a_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{k}, \sigma)|\beta\, \mathrm{in}\rangle \\
&= \tilde{\eta}^{\sigma\tau}\int d^4x\, f^{(\tau)*\mu}(x)(-i\overrightarrow{\Box})\langle\alpha\, \mathrm{out}|Z^{-1/2}A_\mu(x)|\beta\, \mathrm{in}\rangle
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

で与えられる。これは，終ケット (ket) 状態が $\langle\alpha\, \mathrm{out}|a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}, \sigma)$ で与えられる散乱過程の不変振幅 $\mathfrak{M}$ の計算で，$a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}, \sigma)$ 粒子に相当する外線には波動関数 $\tilde{\eta}^{\sigma\tau}\varepsilon_\mu^{(\tau)*}(\boldsymbol{k})$ を付与すべきことを意味する。特に，$\tilde{\eta}^{\sigma\tau}$ は L-S セクターで反対角になっているため，S 行列要素と $\mathfrak{M}$ の計算との間には，見かけ上

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha|a(\boldsymbol{k}, \mathrm{L})S|\beta\rangle &\longleftrightarrow \varepsilon_\mu^{(\mathrm{S})*}(\boldsymbol{k}) \\
\langle\alpha|a(\boldsymbol{k}, \mathrm{S})S|\beta\rangle &\longleftrightarrow \varepsilon_\mu^{(\mathrm{L})*}(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

なる逆転が起こることになる。にもかかわらず，我々は，波動関数 $\varepsilon_\mu^{(\mathrm{L})*}(\boldsymbol{k})$ で計算される $\mathfrak{M}$ は縦波 (L) が出る散乱振幅，$\varepsilon_\mu^{(\mathrm{S})*}(\boldsymbol{k})$ で計算されるものはスカラー波 (S) が出る散乱振幅，と呼ぶ。その理由は，3-2 の終わりにも少し触れたように，今の 1 粒子状態完全性関係も

$$
\int d^3k\, a^\dagger(\boldsymbol{k}, \sigma)|0\rangle\tilde{\eta}^{\sigma\tau}\langle 0|a(\boldsymbol{k}, \tau) = 1 \qquad (7)
$$

のように計量 $\tilde{\eta}^{\sigma\tau}$ を含むので，初期状態 $|\beta\rangle$ の散乱後の状態 $S|\beta\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\int d^3k\, \{&\cdots + a^\dagger(\boldsymbol{k}, \mathrm{L})|\cdots\rangle\langle\cdots|a(\boldsymbol{k}, \mathrm{S})S|\beta\rangle \\
&+ a^\dagger(\boldsymbol{k}, \mathrm{S})|\cdots\rangle\langle\cdots|a(\boldsymbol{k}, \mathrm{L})S|\beta\rangle + \cdots\}
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

となるからである。すなわち，$\varepsilon_\mu^{(\mathrm{L})*}$ で計算される S 行列要素 $\langle\cdots|a(\boldsymbol{k}, \mathrm{S})S|\beta\rangle$ は，確かに縦波終状態 $a^\dagger(\boldsymbol{k}, \mathrm{L})|\cdots\rangle$ になる散乱振幅を与えているのである。

FP ゴースト・反ゴーストの場合も，計量が 5-6 (36) の示すように反対

角なので (8) と同様な見かけ上の逆転が起こることに注意しておこう：

$$\int d^3k\{\cdots+c^\dagger(\boldsymbol{k})|\cdots\rangle i\langle\cdots|\bar{c}(\boldsymbol{k})S|\beta\rangle + \bar{c}^\dagger(\boldsymbol{k})|\cdots\rangle(-i)\langle\cdots|c(\boldsymbol{k})S|\beta\rangle+\cdots\}. \tag{9}$$

簡単な計算例　一つの簡単な具体例として，初期状態が Dirac 粒子と反粒子 1 個ずつの 2 体状態，終状態がゲージ粒子 2 体状態となる散乱過程を考えよう。この過程に効く摂動の最低次の Feynman グラフは 5·2 図 A, B, C に示した三つである。初期状態の Dirac 粒子，反粒子のスピノールを

$$u(\boldsymbol{p}_1, s_1)\equiv u, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\equiv\bar{v}, \tag{10}$$

終状態ゲージ場 2 粒子の偏極ベクトルを

$$\varepsilon^{(\sigma_1)\mu}(\boldsymbol{k}_1)\equiv\varepsilon_1^\mu, \qquad \varepsilon^{(\sigma_2)\mu}(\boldsymbol{k}_2)\equiv\varepsilon_2^\mu \tag{11}$$

と記し，表 1 および **4-6** (22) の Feynman 則を適用すれば，不変振幅 $\mathfrak{M}$ に対する 5·2 図 A, B, C のグラフの寄与はそれぞれ次のようになる：

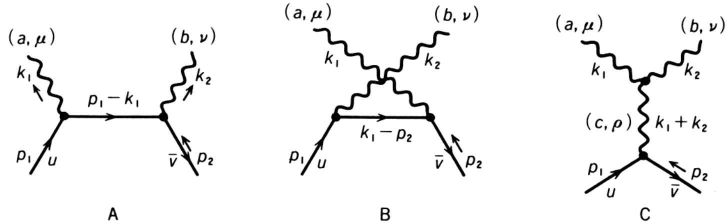
$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_A &= \varepsilon_1^{*\mu}\varepsilon_2^{*\nu}\,\bar{v}gT^b\gamma_\nu\frac{1}{m-(\not{p}_1-\not{k}_1)}gT^a\gamma_\mu u,\\
\mathfrak{M}_B &= \varepsilon_1^{*\mu}\varepsilon_2^{*\nu}\,\bar{v}gT^a\gamma_\mu\frac{1}{m-(\not{k}-\not{p}_2)}gT^b\gamma_\nu u,\\
\mathfrak{M}_C &= \varepsilon_1^{*\mu}\varepsilon_2^{*\nu}(igf_{abc})[g_{\mu\nu}(k_1-k_2)_\rho+g_{\nu\rho}(k_1+2k_2)_\mu+g_{\rho\mu}(-2k_1-k_2)_\nu]\\
&\quad\times\frac{1}{(k_1+k_2)^2}\,\bar{v}gT^c\gamma^\rho u.
\end{aligned} \tag{12}$$

ただし Feynman ゲージ $\alpha_r=1$ をとった。また伝播関数中の $i\epsilon$ も省略した。

終状態ゲージ場が (物理的な) 横波状態の場合は, (12) の振幅はこれ以上そう簡単にはならない。しかし，ここで，ε_1^μ が縦波状態，**5-6** (42),

$$\varepsilon_1^{*\mu}=\varepsilon^{(L)*\mu}(\boldsymbol{k}_1)=ik_1^\mu \tag{13}$$

の場合を考えよう。この場合 (12) は非常に簡単になる。まず恒等式



5·2 図

$$\frac{1}{m-(\not{p}-\not{k})}\not{k}\frac{1}{m-\not{p}}=\frac{1}{m-\not{p}}-\frac{1}{m-(\not{p}-\not{k})} \tag{14}$$

が成り立つことに注意する。この両辺に右から $(m-\not{p})u(\boldsymbol{p},s)$ を掛け，その後 p^μ を質量殻 $p^2=m^2$ 上におけば，右辺第 2 項は，運動方程式 $(\not{p}-m)u(\boldsymbol{p},s)=0$ で落ちて，

$$\frac{1}{m-(\not{p}-\not{k})}\not{k}u(\boldsymbol{p},s)=u(\boldsymbol{p},s) \tag{15}$$

を得る。(14) の p^μ を $-p^\mu+k^\mu$ と書き換え，両辺に左から $\bar{v}(\boldsymbol{p},s)(m+\not{p})$ を掛ければ，今度は右辺第 1 項が落ちて

$$\bar{v}(\boldsymbol{p},s)\not{k}\frac{1}{m-(\not{k}-\not{p})}=-\bar{v}(\boldsymbol{p},s) \tag{16}$$

を得る。それゆえ，$\varepsilon_1^{*\mu}=ik_1^\mu$ のとき，(12) の $\mathfrak{M}_{\mathrm{A}}, \mathfrak{M}_{\mathrm{B}}$ は，それぞれ (15), (16) を用いて

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\mathrm{A}}&=g^2\varepsilon_2^{*\nu}\,\bar{v}\gamma_\nu T^b T^a u,\\ \mathfrak{M}_{\mathrm{B}}&=-g^2\varepsilon_2^{*\nu}\,\bar{v}\gamma_\nu T^a T^b u,\end{aligned} \tag{17}$$

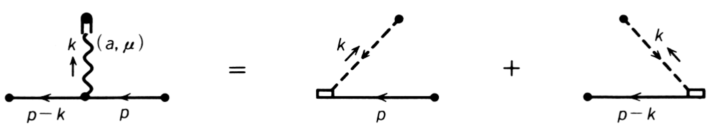
となる。

$\mathfrak{M}_{\mathrm{C}}$ の簡単化の前に，少し寄り道をして，(14) の等式が実は (摂動最低次での) Ward-高橋 (WT) 恒等式の一つであることに注意しておこう。事実 **5-6** (1) で $\mathcal{O}_1=\psi$，$\mathcal{O}_2=\bar{\psi}$，$\mathcal{O}_3=\bar{c}^a$ ととってやれば

$$\begin{aligned}&-\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\,\bar{\psi}(y)\,iB^a(z)|0\rangle\\ &\quad=\langle 0|\mathrm{T}igc^b(x)T^b\psi(x)\bar{\psi}(y)\,\bar{c}^a(z)|0\rangle\\ &\qquad-\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)(-ig)c^b(y)\bar{\psi}(y)T^b\,\bar{c}^a(z)|0\rangle\end{aligned} \tag{18}$$

なる WT 恒等式となる。ところが，この恒等式は結合定数 g によらずに成立するから，g の各次数ごとに両辺が等しい。特に，g の 1 次で両辺の Green 関数に効く Feynman グラフは 5·3 図に示したもので，

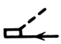
$$\begin{aligned}&-i(ik^\mu)\frac{g_{\mu\nu}}{ik^2}\frac{1}{i[m-(\not{p}-\not{k})]}gT^a\gamma^\nu\frac{1}{i(m-\not{p})}\\ &=\frac{i}{i(-k^2)}\left[gT^a\frac{1}{i(m-\not{p})}+\frac{1}{i[m-(\not{p}-\not{k})]}(-gT^a)\right]\end{aligned} \tag{19}$$

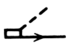


5·3 図　摂動最低次での WT 恒等式 (18)

と読み取れる。ここで，i）Green 関数の外線は，表 1 の内線伝播関数の$1/i$倍を使うこと，ii）$B^a=-\partial^\mu A_\mu^a(\alpha_\mathrm{r}=1)$を使ったこと，さらに iii）$i\mathcal{L}_\mathrm{int}$で指定される頂点因子からすべて i を外したものを使う今の Feynman 則では，BRS 変換で与えられる頂点 $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\psi=igc^aT^a\psi$，$\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\bar{\psi}=-igc^a\bar{\psi}T^a$ からも i の因子を外すべきこと，に注意せよ。5·3 図で用いた記号は

 : $i\partial^\mu A_\mu^a \sim k^\mu \tilde{A}_\mu^a(k)$ または $-k^\mu\tilde{A}_\mu^a(-k)$

 : $gc^aT^a\psi,$ (20)

 : $-gc^a\bar{\psi}T^a$

を表すものである。(19) の WT 恒等式は，両辺に共通な$1/(-k^2)$の因子(左辺ではゲージ場の伝播関数の $-i$ 倍，右辺では FP ゴーストの伝播関数) で割れば，上で使った (14) と同じなのは明白である。この共通の “伝播関数” 因子$1/(-k^2)$を外した WT 恒等式を 5·4 図のように描くことにする。そうすれば，(15),(16) のような片方のフェルミオン線が質量殻上外線になっている場合の WT 恒等式は，5·4 図の恒等式に $i(m-\not{p})u(p)$ などを掛けることによって得られ，5·5 図 A, B のように表せる。この Feynman グラフで表した WT 恒等式を，直接，最初の 5·2 図 A, B の Feynman グラフの部分グラフに ($\varepsilon_1^{*\mu}=ik^\mu$ のとき) 適用すれば，5·6 図となる。この右辺は (17) の $\mathfrak{M}_\mathrm{A}+\mathfrak{M}_\mathrm{B}$ を直接与えている。

ここまで理解すれば，(12) の $\mathfrak{M}_\mathrm{C}$ を簡単化するのは容易である。今度は，**5-6** の (1) で $\mathcal{O}_1=A_\nu^b$，$\mathcal{O}_2=A_\rho^c$，$\mathcal{O}_3=\bar{c}^a$ とした WT 恒等式が

$$-\langle 0|\mathrm{T}A_\nu^b(x)A_\rho^c(y)iB^a(z)|0\rangle$$
$$=\langle 0|\mathrm{T}D_\nu c^b(x)A_\rho^c(y)\bar{c}^a(z)|0\rangle+\langle 0|\mathrm{T}A_\nu^b(x)D_\rho c^c(y)\bar{c}^a(z)|0\rangle \quad (21)$$

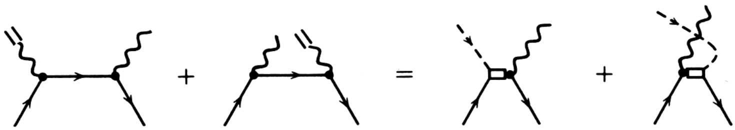


5·4 図

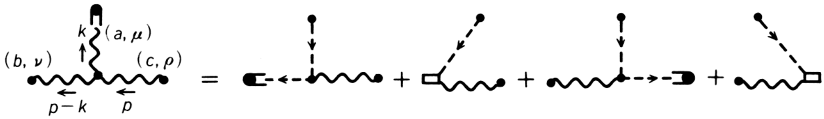


A B

5·5 図



5·6 図



5·7 図

となり，これの摂動最低次 $O(g^1)$ の Feynman グラフは 5·7 図で与えられて

$$i(-ik^{\mu})\frac{1}{ik^2}igf_{abc}[g_{\mu\nu}(2k-p)_{\rho}+g_{\nu\rho}(2p-k)_{\mu}$$

$$+g_{\rho\mu}(-p-k)_{\nu}]\frac{1}{i(p-k)^2}\frac{1}{ip^2}$$

$$=\frac{i}{i(-k^2)}\left[-i(p-k)_{\nu}\frac{i}{-i(p-k)^2}gf_{cab}(p-k)_{\rho}\frac{1}{ip^2}+\frac{g}{i}f_{bca}\,g_{\nu\rho}\frac{1}{ip^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i(p-k)^2}gf_{bac}(-p)_{\nu}\frac{i}{i(-p^2)}ip_{\rho}+\frac{1}{i(p-k)^2}\frac{g}{i}f_{cba}\,g_{\rho\nu}\right] \quad (22)$$

と読み取れる。ただし，5·7 図では表 2 のグラフ規則を使った。表 2 には，(20) を含めて，WT 恒等式に現れる BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\Phi}$ により生ずる頂点，端点の Feynman 則をまとめておいた。(22) は直接にも容易に確かめられる。さらに，ゴースト伝播関数因子 $1/(-k^2)$ を外し，左から $\varepsilon^{*\nu}i(p-k)^2$ を掛け $p-k$ を質量殻上 $(p-k)^2=0$ にとれば，$(p-k)^2=0$ で極を持たない 5·7 図右辺第 2 項は落ち，5·8 図で表される恒等式を得る。この恒等式 5·8 図を直接，$\varepsilon_1^{*\mu}=ik^{\mu}$ のときの Feynman グラフ 5·2 図 C に適用すれば，$\mathfrak{M}_{\mathrm{C}}$ は 5·9 図で表されることになる。すなわち，式で表すと，表 1, 2 の規則に従って，

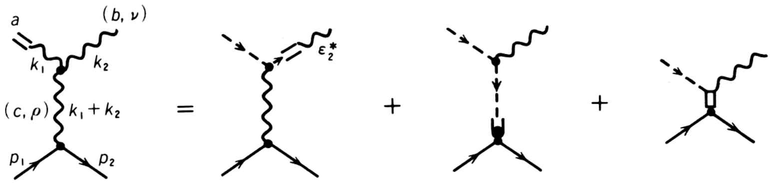
$$\mathfrak{M}_{\mathrm{C}}=\left[gf_{abc}\,k_2^{\rho}(-\varepsilon_2^*\cdot k)\frac{1}{(k_1+k_2)^2}+\right.$$

$$+\varepsilon_2^{*\nu}gf_{acb}(-k_1-k_2)_{\nu}\frac{i}{-(k_1+k_2)^2}i(k_1+k_2)^{\rho}$$

$$\left.+\varepsilon_2^{*\nu}\frac{g}{i}f_{cba}\,g_{\rho\nu}\right]\bar{v}gT^c\gamma_{\rho}u \quad (23)$$

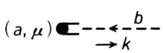
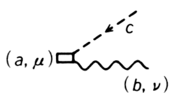
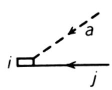
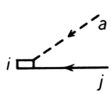


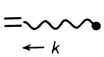
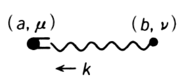
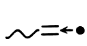
5·8 図



5·9 図

表 2 WT 恒等式に現れる Feynman 則

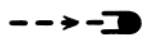
BRS 変換頂点，端点		
$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} A_\mu^a$:		$ik_\mu \delta_{ab}$
		$\frac{g}{i} f_{abc}\, g_{\mu\nu}$
$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \psi_i$:		$g(T^a)_i{}^j$
$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}} \overline{\psi}^i$:		$-g(T^a)_j{}^i$

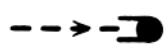
特殊外線			
	$\varepsilon_\mu^{(L)*}(\boldsymbol{k}) = ik_\mu$		$k^\mu \frac{g_{\mu\nu}\delta_{ab}}{ik^2}$
	$-\varepsilon_\mu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{k})k^\mu = i\delta^{\sigma \mathrm{S}}$ ($\varepsilon_\mu^{(\sigma)}$ が縦波 $\varepsilon_\mu^{(\mathrm{L})}(\boldsymbol{k})$ や横波 $\varepsilon_\mu^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ なら 0)		

となる。

ところが，5·9 図（または (23)）右辺第 2 項は，外線波動関数 u, v の Dirac 方程式を使って 0 になる：

$$(k_1+k_2)^\rho\,\bar{v}T^a\gamma_\rho u=\bar{v}T^a[(\not{p}_2+m)+(\not{p}_1-m)]u=0. \qquad (24)$$

ここで，重要な注意をしておくと，この (24)――カレント保存則――は，実は，5·3 図の WT 恒等式なのである。（その二つの Dirac 場外線を両方とも質量殻上の波動関数にしたものである。）このことは，5·9 図第 2 項のゴースト端点因子  が，表 2 からわかるように，縦波ゲージ場の波動関数  と一致している，という重要な事実に基づく：

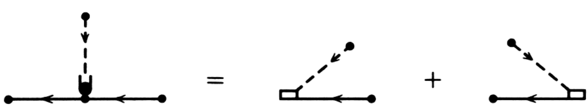
 = 　　(25)

この等式のために，例えば，5·9 図右辺第 2 項の Dirac 場の線が，たとえ質量殻上の波動関数でなく，内線伝播関数としてより大きな Feynman グラフに含まれている場合にも，5·10 図のようにさらに続けて Feynman グラフ WT 恒等式を用いて変形してゆけるのである。これをさらに徹底すれば，Feynman グラフの図形変形という手続きだけで，より高次の WT 恒等式をすべて導くことも可能で，そのような図形的手法を diagrammar の方法と呼ぶ。

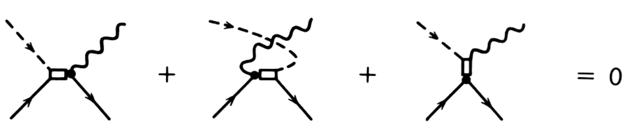
さて，5·9 図に戻って，右辺第 2 項が消えた後，右辺第 3 項も，実は，5·6 図で表される $\mathfrak{M}_A+\mathfrak{M}_B$ と相殺してなくなることがわかる。これは，表現行列 T^a の満たす Lie 代数

$$[T^a, T^b]=if_{abc}T^c \qquad (26)$$

のせいで，Feynman グラフで表示して 5·11 図の等式が成り立つからである。したがって，結局，偏極ベクトル $\varepsilon_1^{*\mu}$ が縦波ベクトル $\varepsilon^{(L)*\mu}(\boldsymbol{k}_1)=ik_1^\mu$



5·10 図



5·11 図

の場合，不変散乱振幅 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_A+\mathfrak{M}_B+\mathfrak{M}_C$ は 5·9 図右辺第 1 項のみとなり，

$$\mathfrak{M}=gf_{abc}k_2^{\rho}(-\varepsilon_2^*\cdot k)\frac{1}{(k_1+k_2)^2}\bar{v}gT^c\gamma_\rho u \tag{27}$$

で与えられることになる。

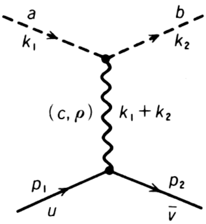
表 2 の最後にも書いたが，**5-6** の (40)～(43) で定義した偏極ベクトル $\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})\,(\sigma=\pm,\mathrm{L},\mathrm{S})$ は $k^\mu\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{k})=i\delta^{\sigma\mathrm{S}}$ を満たすので，この (27) よりただちに，2 番目のゲージ粒子が横波でも縦波でも振幅が 0 になることがわかる：

$$\mathfrak{M}(u(\boldsymbol{p}_1)+\bar{v}(\boldsymbol{p}_2)\ \to\ \varepsilon^{(\mathrm{L})}(\boldsymbol{k}_1)+\varepsilon^{(\pm)}(\boldsymbol{k}_2))=0, \tag{28}$$

$$\mathfrak{M}(u(\boldsymbol{p}_1)+\bar{v}(\boldsymbol{p}_2)\ \to\ \varepsilon^{(\mathrm{L})}(\boldsymbol{k}_1)+\varepsilon^{(\mathrm{L})}(\boldsymbol{k}_2))=0. \tag{29}$$

そして唯一残るスカラー波 $\varepsilon_2^{*\mu}=\varepsilon_\mu^{(\mathrm{S})*\mu}(\boldsymbol{k}_2)$ の場合，因子 $(-\varepsilon_2^*\cdot k)$ は i となり，(27) の振幅は，(5·9 図右辺第 1 項のグラフからもわかるように) ちょうど 5·12 図に示した終状態が FP ゴースト-反ゴーストのペアとなる過程の散乱振幅†

$$\mathfrak{M}_{c\bar{c}}=gf_{abc}k_2^{\rho}\frac{1}{(k_1+k_2)^2}\bar{v}gT^c\gamma_\rho u \tag{30}$$



5·12 図

の i 倍に等しいことがわかる。すなわち，摂動の g^2 のオーダーで

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}(u(\boldsymbol{p}_1)+\bar{v}(\boldsymbol{p}_2)\ \to\ \varepsilon^{(\mathrm{L})}(\boldsymbol{k}_1)+\varepsilon^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k}_2))\\&\quad=i\,\mathfrak{M}(u(\boldsymbol{p}_1)+\bar{v}(\boldsymbol{p}_2)\ \to\ c(\boldsymbol{k}_1)+\bar{c}(\boldsymbol{k}_2))\end{aligned} \tag{31}$$

なる散乱振幅の等式を得る。上の (6), (8), (9) で注意した“逆転”現象に注意すれば，(28), (29), (31) の等式は次のような S 行列要素の関係式としていい直すことができる：

$$\langle 0|a^a(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{S})a^b(\boldsymbol{k}_2,\pm)S|\alpha\rangle=0, \tag{32}$$

$$\langle 0|a^a(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{S})a^b(\boldsymbol{k}_2,\mathrm{S})S|\alpha\rangle=0, \tag{33}$$

$$\langle 0|a^a(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{S})a^b(\boldsymbol{k}_2,\mathrm{L})S|\alpha\rangle=i\langle 0|\bar{c}^a(\boldsymbol{k}_1)c^b(\boldsymbol{k}_2)S|\alpha\rangle. \tag{34}$$

ここで，Dirac 粒子-反粒子ペアの初期状態を $|\alpha\rangle$ と記した。

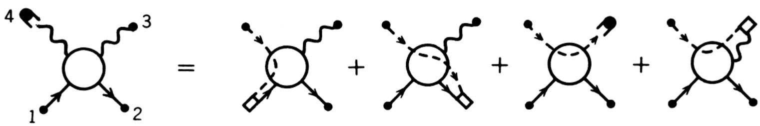
***S* 行列要素関係式と Green 関数 WT 恒等式**　以上，我々は非常に具体的な計算を行って，摂動の g^2 のオーダーまでの範囲で，S 行列要素の関係式

† FP ゴーストの伝播関数には表 1 に示すように分子に余分な i の因子があるために，$\mathfrak{M}$ の計算には，ゴーストの終状態には i，反ゴーストの終状態には $-i$ (初期状態なら逆) の因子を掛けなければならない。しかし，幸い，この因子は，ゴースト数保存則のために，$\mathfrak{M}$ 全体には効かず忘れてよい。

(32) ～ (34) を見出した。特に $O(g^1)$ の WT 恒等式 5·3 図，5·7 図を駆使して計算したのだが，実は，最後の結果 (32) ～ (34) 自体は，直接 4 点 Green 関数に対する WT 恒等式から従うのである：すなわち，**5-6** (1) で $\mathcal{O}_1=\psi$, $\mathcal{O}_2=\overline{\psi}$, $\mathcal{O}_3=A_\nu{}^b$, $\mathcal{O}_4=\bar{c}^a$ ととれば

$$
\begin{aligned}
-\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\overline{\psi}(y)A_\nu^b(z)iB^a(w)|0\rangle
&=\langle 0|\mathrm{T}igc^c(x)T^c\psi(x)\,\overline{\psi}(y)A_\nu^b(z)\bar{c}^a(w)|0\rangle\\
&\quad-\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)(-ig)c^c(y)\overline{\psi}(y)T^cA_\nu^b(z)\bar{c}^a(w)|0\rangle\\
&\quad+\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\,\overline{\psi}(y)D_\nu c^b(z)\bar{c}^a(w)|0\rangle \qquad (35)
\end{aligned}
$$

なる 4 点 Green 関数 WT 恒等式が得られ，これは Feynman 図では 5·13 図で表される。図の中央白丸 ○ はあらゆる可能な Feynman グラフの和を表す。

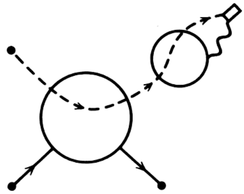


5·13 図

今簡単のため，この WT 恒等式 5·13 図を摂動の最低次 $O(g^2)$ で考えることにし，この両辺で LSZ 簡約公式 **3-3** (12) を適用する，すなわち Green 関数の四つの足 (5·13 図の 1 ～ 4) に 1 粒子伝播関数の逆数 ($i(m-\not{p})$ または ik^2) を掛けた後，各運動量を質量殻上 ($p^2=m^2$ または $k^2=0$) におき，外線波動関数 (u, $\bar{v}$ または $\varepsilon^{(\sigma)*\mu}$) を掛ければ，5·13 図の左辺は，Dirac 粒子-反粒子のペア 2 粒子初期状態から，4 のチャネルが縦波のゲージ場 2 粒子状態への散乱振幅になる。ところが，一方，5·13 図の右辺は，3 番目のグラフ以外，1, 2, 3 のどれかのチャネルがゴーストを伴う 2 粒子状態になっているため 1 粒子 pole を含まず，したがって，$i(m-\not{p})$ や k^2 を掛けても相殺されず，運動量を質量殻上におき波動関数を掛けたときに 0 となって落ちることになる。唯一 3 番目のグラフは，この過程で生き残るが，表 2 の規則により 3 のチャネルの運動量 k^ν に比例していることがわかり，3 の足のゲージ粒子の波動関数 $\varepsilon_\nu^{(\sigma)*}(\boldsymbol{k}_2)$ との縮約で $-k_2\cdot\varepsilon^{(\sigma)*}(\boldsymbol{k}_2)$ の因子を出す。この因子を除いてちょうど FP ゴースト-反ゴーストペアへの散乱振幅を与えることがわかるので，結局，5·13 図の等式は，上で見つけた振

幅の関係式 (28), (29), (31) を再現することになる。

ここで与えた議論は，容易に摂動の全次数に拡張できる。全次数の議論では，5·13 図右辺第 4 項は，5·14 図に示すタイプのグラフが FP ゴースト 1 粒子 pole を作るようになるので，もはや落とせなくなる。しかし，同時に，LSZ 公式で正しい散乱振幅を得るには，くりこまれた Heisenberg 場 $Z_3^{-1/2}A_\mu, Z_3^{+1/2}B, \tilde{Z}_3^{-1/2}c, \tilde{Z}_3^{-1/2}\bar{c}$ の Green 関数を用いねばならない (摂動の最低次では Z は 1 であった) という点も考慮に入れることが必要になる。この二つのことを考慮すれば，実は，上の関係式 (28), (29), (31) は，摂動の全次数でも変更なく成立することが示せる。これについては，次節でもっと一般的かつ系統的な方法を展開するので，ここでは，これ以上深入りしないことにしよう。



5·14 図

同様にして，我々は種々な多点 Green 関数の WT 恒等式から出発して，外線に伝播関数の逆数を掛け，質量殻上にのせる，という手続きで，摂動の任意次数で成立する無限に多くの S 行列要素の間の関係式 —— これを S 行列 WT 恒等式と呼ぼう —— を得ることができる。そして，そのような S 行列 WT 恒等式全体が，物理的 S 行列 $S_{\rm phys}$ がユニタリーであることを保証しているのである。

例えば，上で得た S 行列 WT 恒等式 (32), (33) は，[(8) を思い起こして] Dirac 粒子-反粒子ペア状態 $|\alpha\rangle$ の散乱後の状態 $S|\alpha\rangle$ の中に

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_1, {\rm L})a^\dagger(\boldsymbol{k}_2, \pm)|0\rangle, \qquad a^\dagger(\boldsymbol{k}_1, {\rm L})a^\dagger(\boldsymbol{k}_2, {\rm L})|0\rangle \tag{36}$$

のような縦波ベクトル粒子を含む状態が現れないことをいっている。一方，スカラー波ベクトル粒子を含む

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_1, {\rm S})a^\dagger(\boldsymbol{k}_2, \pm)|0\rangle, \qquad a^\dagger(\boldsymbol{k}_1, {\rm S})a^\dagger(\boldsymbol{k}_2, {\rm S})|0\rangle \tag{37}$$

の状態は，対応する S 行列 WT 恒等式の制限が存在しないので，散乱後の $S|\alpha\rangle$ の中に一般に現れる。スカラー波は非物理的モードのはずなのだが，(37) は現れるのである。しかしながら，ここで，**5-6** (47) の交換関係，特に

$$[a(\boldsymbol{k}, {\rm S}), a^\dagger(\boldsymbol{q}, {\rm S})] = 0 \tag{38}$$

$$[a(\boldsymbol{k}, {\rm S}), a^\dagger(\boldsymbol{q}, {\rm L})] = [a(\boldsymbol{k}, {\rm L}), a^\dagger(\boldsymbol{q}, {\rm S})] = \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) \tag{39}$$

を思い起こそう。すなわち，スカラー波のモードどうしは可換で，縦波モードとのみ非可換なのである。このため，(37) のスカラー波状態がいくら現れても，それらは (38) の可換性により**零ノルム**の状態であることがわかり，観測にかからない。このとき，縦波モード状態 (36) が禁止されていることが重要である。(37) の状態が 0 でない内積を持ち得る相棒の状態は，(39) により，(36) の状態のみで，(36) と (37) が同時に現れていたとすると，それらの線形結合状態は有限の (0 でない) ノルムを持ち，その“確率”で観測されることになってしまうからである。しかも，(36) と (37) の相対的重みの現れ方いかんによっては，この“確率”＝ノルム は，**5-6** (48) の例のように，負にもなり，物理的解釈が全然できなくなるのである。

上のもう一つの S 行列 WT 恒等式 (34) の意味するところは，もっとおもしろい。(34) は，縦波とスカラー波のモードが一つずつのゲージ場 2 粒子状態も，FP ゴースト-反ゴーストのペア状態も，どちらも禁止はせず，単にそれらが i を除いて同じ重みで現れることを主張している。すなわち，終状態 $S|\alpha\rangle$ の中で，それらは

$$[a^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\mathrm{S})a^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{L})-i\bar{c}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)c^\dagger(\boldsymbol{k}_1)]|0\rangle \tag{40}$$

の線形結合で現れるということである。ところが，この形の状態間の内積は，(39) および **5-6** (36) の (反) 交換関係より

$$\langle 0|a(\boldsymbol{q}_1,\mathrm{L})a(\boldsymbol{q}_2,\mathrm{S})a^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\mathrm{S})a^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{L})|0\rangle=\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{k}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{k}_2), \tag{41}$$

$$\langle 0|ic(\boldsymbol{q}_1)\bar{c}(\boldsymbol{q}_2)(-i)\bar{c}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)c^\dagger(\boldsymbol{k}_1)|0\rangle=-\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{k}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{k}_2) \tag{42}$$

が従うので，ゲージ場の部分の寄与 (41) と FP ゴースト部分の寄与 (42) とがちょうど相殺して 0 となる！ [(42) 右辺のマイナス符号は，$\bar{c}(\boldsymbol{q}_2)$ と $\bar{c}^\dagger(\boldsymbol{k}_2)$ の順序交換に起因することに注意。]　ゲージ粒子の L-S 状態が 0 でない内積を持ち得る相棒は L-S 状態のみで，FP ゴーストの c-$\bar{c}$ 状態の相棒も c-$\bar{c}$ 状態のみであるから，それらが (40) の組合せでしか現れないということは，それら非物理的状態も零ノルムで観測にかからないことを意味している。

このような議論を，非物理的モード，すなわち，縦波，スカラー波，FP ゴースト，反ゴースト，の関わる任意の S 行列要素に対して行い，それらのモードがすべて零ノルムの組合せでしか現れない，ということを証明せねばならないのだが，これは大変な作業である。すなわち，いろいろな Green 関数の WT 恒等式を手当り次第に書き，それから外線を質量殻上にのせる手続きで S 行列 WT 恒等式をたとえ得たとしても，それらの S 行

列要素間の関係式は多粒子状態になると飛躍的に複雑なものとなり，果たして非物理的モードがすべて零ノルム状態で出ていることを保証しているものなのか，全然わからなくなる。それゆえ，実際にこの証明を遂行するには，S 行列 WT 恒等式の本質をとらえたもっと強力な方法が必要で，これを次節および次々節で与える。

5-8 物理的 S 行列のユニタリー性 I

この節および次節で，物理的 S 行列 $S_{\rm phys}$ がユニタリーであることをかなり一般的に証明する。何を示せばよいのかは次の定理が明らかにしてくれる。

[定理] 理論が次の三つの条件を満たすとする：

i） 全状態空間 $\mathcal{V}$ で定義された S 行列演算子 S がユニタリーである。

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1. \tag{1}$$

ii） $\mathcal{V}$ の中の物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ は時間発展の下で不変である。それゆえ，特に，S 行列演算子の下で不変である：

$$S\mathcal{V}_{\rm phys} = S^\dagger\mathcal{V}_{\rm phys} = \mathcal{V}_{\rm phys}. \tag{2}$$

iii） $\mathcal{V}_{\rm phys}$ は半正定値計量 (positive semi-definite metric) を持つ。すなわち

$$任意の\ |{\rm phys}\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys}\ に対し\quad \langle{\rm phys}|{\rm phys}\rangle \geqq 0. \tag{3}$$

このとき，物理的 S 行列 $S_{\rm phys}$ は，正定値計量を持つ商空間

$$H_{\rm phys} \equiv \mathcal{V}_{\rm phys}/\mathcal{V}_0 \qquad (\mathcal{V}_0：\mathcal{V}_{\rm phys}\ の零ノルム部分空間) \tag{4}$$

の上で矛盾なく定義され，ユニタリー性を満たす：

$$S_{\rm phys}^\dagger S_{\rm phys} = S_{\rm phys} S_{\rm phys}^\dagger = 1. \tag{5}$$

[この定理の結論部の“商空間”(quotient space)や“零ノルム部分空間” $\mathcal{V}_0$ の意味は以下の証明の中でもっと詳しく説明するので心配なく。]

証明） $\mathcal{V}_{\rm phys}$ の中でノルムが 0 である状態の全体を $\mathcal{V}_0$ と定義する。すなわち，

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ |\chi\rangle \,\middle|\, |\chi\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys},\ \langle\chi|\chi\rangle = 0 \right\}. \tag{6}$$

このとき，$\mathcal{V}_0$ の元 $|\chi\rangle$ はどれもすべての $\mathcal{V}_{\rm phys}$ の元 $|f\rangle$ と直交する：

$$\forall|\chi\rangle \in \mathcal{V}_0,\ \forall|f\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys} \qquad に対し \qquad \langle f|\chi\rangle = 0. \tag{7}$$

なぜなら，任意の複素数 z に対し，$z|\chi\rangle+|f\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ だから (3) の仮定により

$$(\langle\chi|z^*+\langle f|)(z|\chi\rangle+|f\rangle)=2\,\mathrm{Re}(z\langle\chi|f\rangle)+\langle f|f\rangle\geqq 0 \qquad (8)$$

を満たさねばならないが，これは $\langle\chi|f\rangle=0$ でないとあり得ないからである。(7) の性質から，また，$\mathcal{V}_0$ が部分空間であることも明らかである。

零ノルム部分空間 $\mathcal{V}_0$ の性質 (7) は，物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ の中の一つの状態 $|f\rangle$ と，零ノルム状態 $|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0$ だけ異なる別の状態 $|f\rangle+|\chi\rangle$ とは，$\mathcal{V}_{\text{phys}}$ の中で物理的に決して見分けられない，ということをいっている。それゆえ，ある状態 $|f\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ と零ノルム状態 $|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0$ 分だけの差しかない状態全体をひとまとめにし，

$$|\hat{f}\rangle=\left\{|f'\rangle\,\Big|\ \ |f'\rangle-|f\rangle\in\mathcal{V}_0,\ \ |f'\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}\right\} \qquad (9)$$

と記し，$|f\rangle$ を代表元とする (同値) 類 (class) と呼ぶ。この類 $|\hat{f}\rangle$ の一つ一つを元とみなす集合は，数学で一般に商空間 $\mathcal{V}_{\text{phys}}/\mathcal{V}_0$ と呼ばれるもので，我々は，これを (4) で書いたように H_{phys} と記す。要するに，零ノルム状態の差を無視した状態空間 H_{phys} を考えようということである。(7) の性質により，$|\hat{f}\rangle$ に属する状態 $|f\rangle$ と，$|\hat{g}\rangle$ に属する状態 $|g\rangle$ の間の内積 $\langle f|g\rangle$ は，代表元 $|f\rangle,|g\rangle$ の選び方によらないから，空間 H_{phys} の 2 元 $|\hat{f}\rangle,|\hat{g}\rangle$ の内積を

$$\langle\hat{f}|\hat{g}\rangle\equiv\langle f|g\rangle \qquad |f\rangle\in|\hat{f}\rangle,\ \ |g\rangle\in|\hat{g}\rangle \qquad (10)$$

で矛盾なく定義できる。この内積を付与された H_{phys} は，$\langle\hat{f}|\hat{f}\rangle=0$ ならば $|\hat{f}\rangle=|\hat{0}\rangle=\left\{|\chi\rangle\,\Big|\ \ |\chi\rangle-0\in\mathcal{V}_0\right\}$ が成り立つから，正定値計量空間となるので，物理的 Hilbert (ヒルベルト) 空間と呼ぶ。

上の ii) の仮定により，$\mathcal{V}_{\text{phys}}$ が S 行列演算子 S の下で不変であるから，その零ノルム部分空間 $\mathcal{V}_0$ も S の下で不変である：実際，$^\forall|f\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に対し $S^\dagger|f\rangle\equiv|f'\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ であるから，$^\forall|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0$ に対し $S|\chi\rangle$ も，(7) より

$$\langle f|(S|\chi\rangle)=\langle f'|\chi\rangle=0 \qquad (11)$$

を満たすので $S|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0$ がいえる。すなわち，零ノルム状態は S を演算した後も零ノルム状態にとどまる。したがって，H_{phys} において物理的 S 行列 S_{phys} を，もとの $\mathcal{V}$ における S 行列 S から

$$S_{\text{phys}}|\hat{f}\rangle\equiv\widehat{S|f\rangle} \qquad (12)$$

で矛盾なく定義できる。これで自然に定義された S_{phys} は，定理の仮定 i) により，ユニタリーであることがわかる：

$$\langle \hat{f} | S^{\dagger}_{\rm phys} S_{\rm phys} | \hat{g} \rangle = \langle \widehat{Sf} | \widehat{Sg} \rangle = \langle Sf | Sg \rangle$$
$$= \langle f | S^{\dagger} S | g \rangle = \langle f | g \rangle = \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle. \qquad (13)$$

これで証明が終わった。

我々の非可換ゲージ理論の場合，定理の i) の仮定，全 S 行列 S のユニタリー性 $S^{\dagger}S=SS^{\dagger}=1$ は，**5-5** (22) で注意したように FP ゴースト場を正しく hermite にとっておけば，時間発展がユニタリーとなるから，成立している。そして，物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ は，この場合，

$$Q_{\rm B} | {\rm phys} \rangle = 0 \iff | {\rm phys} \rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys} \qquad (14)$$

で定義されており，BRS 電荷 $Q_{\rm B}$ は保存量 (で，かつ，Lorentz スカラー) であるから，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ は明らかに時間発展の下で不変 (で，かつ，Lorentz 不変) であり，定理の ii) の仮定も満たす。

自明でないのは，定理の仮定 iii), (14) で指定される $\mathcal{V}_{\rm phys}$ が半正定値計量を持つか，という部分である。前節の具体的摂動計算では，負ノルム状態をつくる危険性のある非物理的モード，すなわち，ゲージ場の縦波・スカラー・モードと FP ゴースト・反ゴーストモード，が摂動の g^2 のオーダーまで，皆うまく零ノルム状態でしか現れないことを示したわけで，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ の一部 (Dirac 粒子-反粒子ペア初期状態から散乱後につくられるゲージ場または FP ゴースト 2 粒子セクター) について半正定値性を示したことに相当している。ここでは，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ の半正定値性を，もっと系統的かつ一般的な方法で示す。そのためには，前節の計算でも重要な役割をした WT 恒等式，のより本質的な表現である BRS 電荷 $Q_{\rm B}$ について考察する必要がある。

保存電荷の漸近場による表現　まず，BRS 電荷 $Q_{\rm B}$ に限らず，一般に保存する電荷演算子 Q があれば，漸近的完全性の仮定の下で，それを漸近場 $\phi_i^{\rm as}$ (as＝in または out) で表すと必ず双一次 (bi-linear) の形になる，ということを示そう。これはいい換えると，Q が $\phi_i^{\rm as}$ の上に引き起こす変換は必ず線形である，

$$[i\epsilon Q, \phi_i^{\rm as}(x)] = \epsilon a_{ij} \phi_j^{\rm as}(x), \qquad (15)$$

という主張である。係数行列 a_{ij} は微分演算子 ∂_μ を有限回含んでいてよい。(ϵ は無限小変換パラメータで，$Q_{\rm B}$ のような Fermi 的電荷の場合は Grassmann 数である。)　ただし，Q は **6** 章で議論する自発的な破れを起こしていない対称性の電荷と仮定する。

この主張に対する素朴な証明は次のようなものである。Q が漸近場 $\phi_i^{\rm as}$

に引き起こす変換を一般に

$$[i\epsilon Q, \phi_i^{\mathrm{as}}(x)] = \epsilon\delta\phi_i^{\mathrm{as}}(x) \tag{16}$$

と記し，両辺に Klein-Gordon (または Dirac) 演算子 $\Box_x + m_i^2$ を演算すると，左辺は漸近場の自由場方程式 $(\Box + m_i^2)\phi_i^{\mathrm{as}} = 0$ で消えるので，右辺も $(\Box + m_i^2)\delta\phi_i^{\mathrm{as}} = 0$ を満たさねばならない。これは，$\delta\phi_i^{\mathrm{as}}$ が，ϕ_i^{as} の質量 m_i と縮退した質量を持つすべての漸近場 ϕ_j^{as} $(m_j = m_i)$ の線形結合で書けることを意味し，(15) が結論される。

この“証明”は簡明でよいのだが，けちをつければ難点がある。例えば $\phi_i^{\mathrm{in}}(x)$ の変換が $(\Box + m_i^2)\delta\phi_i^{\mathrm{in}} = 0$ を満たすからといって in 場 ϕ_j^{in} のみの線形結合で書けるのか，例えば，なぜ，同じ自由場方程式を満たす out 場 ϕ_j^{out} が混じっていけないのか？という問題である。

そこで，もう少ししっかりした証明を与えよう。完全系をなす漸近場 ϕ_i^{as} は，(Dirac 場でも本質的に同様なので) 簡単のためスカラー場 (またはベクトル場のモード成分) として扱うことにする。しかし，ベクトル場の場合の縦波とスカラー波の間や，ゴーストと反ゴーストの間に見られるような反対角計量 (すなわち不定計量) の場合も扱えるよう，ϕ_i^{as} の 4 次元 (反) 交換関係を一般の計量 η_{ij} を持った

$$[\phi_i^{\mathrm{as}}(x), \phi_j^{\mathrm{as}}(y)\} = i\eta_{ij}\varDelta(x-y, m_i^2) \tag{17}$$

の形としておく。もちろん，計量 η_{ij} は同じ質量の漸近場間でのみ 0 でないので

$$m_i\eta_{ij} = \eta_{ij}m_j \tag{18}$$

である。$[\quad,\quad\}$ の記号は，漸近場 $\phi_i^{\mathrm{as}}, \phi_j^{\mathrm{as}}$ が共に Fermi 統計のときのみ反交換関係を，それ以外は交換関係を，表すものである。

完全系をなす漸近場 ϕ_i^{as} に対応するくりこまれた Heisenberg 場を $\boldsymbol{\phi}_i$ とする†：

$$\boldsymbol{\phi}_i(x) \underset{x_0 \to \pm\infty}{\longrightarrow} \phi_i^{\mathrm{as}}(x). \qquad \left(\mathrm{as} = \begin{cases} \mathrm{out} \\ \mathrm{in} \end{cases} \right) \tag{19}$$

これらの Heisenberg 場 $\boldsymbol{\phi}_i$ の Q による変換

$$[i\epsilon Q, \boldsymbol{\phi}_i(x)] = \epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_i(x) \tag{20}$$

は，BRS 変換でもそうだが，一般に場 $\boldsymbol{\phi}_j$ に関して非線形な多項式となる。(19) の仮定は，**3-2** (13) で注意したように，

† ϕ_i^{as} が結合状態に相当する漸近場の場合は，対応する Heisenberg 場 $\boldsymbol{\phi}_i$ は Lagrangian に現れる素な Heisenberg 場の多項式で現される。

$$\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}_i(x)\boldsymbol{\phi}_j(y)|0\rangle\Big|_{\text{離散的 pole 部分}}=\frac{1}{i}\frac{\eta_{ij}}{m_i^2-p^2}$$
$$=\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\phi_i^{\mathrm{as}}(x)\phi_j^{\mathrm{as}}(y)|0\rangle \quad (21)$$

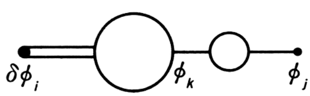
ということを意味する。ただし，F.T. は Fourier 変換 $\int d^4(x-y)\,e^{ip(x-y)}$ である。今，(20) の右辺の“多項式”場 $\delta\boldsymbol{\phi}_i(x)$ と $\boldsymbol{\phi}_j(y)$ の間の 2 点関数を計算し，その離散的pole 部分をとり出して

$$\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\delta\boldsymbol{\phi}_i(x)\,\boldsymbol{\phi}_j(y)|0\rangle\Big|_{\text{離散的 pole 部分}}$$
$$=\frac{1}{i}\frac{a_{ik}(p)\eta_{kj}}{m_j^2-p^2}$$
$$=\mathrm{F.T.}a_{ik}(i\partial)\langle 0|\mathrm{T}\phi_k^{\mathrm{as}}(x)\phi_j^{\mathrm{as}}(y)|0\rangle \quad (22)$$

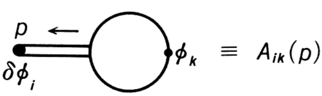
となったとする†。もちろん，pole の留数部 $a_{ik}(p)$ の中の p はすべて Lorentz の足 μ が浮いたもので，縮約された p^2 は含まない。(22) の左辺は，5·15 図に示した形の Feynman 図で計算される。右の $\boldsymbol{\phi}_j$ 側には必ず full な (相互作用をすべて含めた) 1 粒子伝播関数 $\langle 0|\mathrm{T}\boldsymbol{\phi}_k\boldsymbol{\phi}_j|0\rangle$ が含まれており，それを除いた部分の Feynman 図 (5·16 図) の寄与を $A_{ik}(p)$ と記せば，上の留数 $a_{ik}(p)$ は

$$a_{ik}(p)=A_{ik}(p)|_{p^2=m_k^2} \quad (23)$$

で与えられるということである。



5·15 図



5·16 図

さて，(22) は，3-2 (13) でも説明したとおり，

$$\delta\boldsymbol{\phi}_i(x) \xrightarrow[x_0\to\pm\infty]{} a_{ij}\phi_j^{\mathrm{as}}(x) \quad (24)$$

を意味する。ただし $a_{ij}(i\partial)$ を a_{ij} と記した。それゆえ，(20) の Heisenberg 場の変換則の両辺で $x_0\to\pm\infty$ の極限をとれば，Q は保存量で x_0 によらないから，

$$[i\epsilon Q,\phi_i^{\mathrm{as}}(x)]=\epsilon a_{ij}\phi_j^{\mathrm{as}}(x) \quad (25)$$

† (22) の T 積は，4 章で述べたように T* 積を意味する。

が結論され，(15) が証明される。この証明は，係数 a_{ij} の具体的計算法まで与えるので有用である。

念のため，果たして (25) のような漸近場の線形変換が，実際もとのHeisenberg 場 $\boldsymbol{\phi}_i$ の**非線形**な変換 (20) を実現するのか，という問に答えておこう。そのためには，Heisenberg 場の演算子を漸近場で展開した表現を与える Haag-GLZ 公式 **3-3** (23) を思い起こさねばならない：

$$S=:\mathcal{K}:\langle 0|\mathrm{T}\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0} \tag{26}$$

$$S\boldsymbol{\phi}_k(x)=:\mathcal{K}:\langle 0|\mathrm{T}\ \boldsymbol{\phi}_k(x)\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0} \tag{27}$$

ただし，ここで演算子 $:\mathcal{K}:$ は，漸近場 ϕ_i^{as} が (17) の計量を持つから，**3-3** (28) の注意に従い

$$:\mathcal{K}:\equiv:\exp(\phi_i^{\mathrm{as}}\eta_{ij}^{-1}K_j\,\delta/\delta J_j):\qquad K_j=\Box+m_j^2 \tag{28}$$

で与えられるものである。(26)～(28) のくり返し添字は，添字についての和と x についての積分をとるものと了解する。(26), (27) の右辺で演算子であるのは (28) の $\mathcal{K}$ の中に含まれる漸近場 ϕ_i^{as} のみであるから，Q が漸近場 ϕ_i^{as} に対して，(15) または (25) の線形変換を起こすと，(26), (27) の演算子はそれぞれ次のように変換される：

$$\begin{aligned}[i\epsilon Q, S]&=:\mathcal{K}[i\epsilon Q,\phi_i^{\mathrm{as}}]\eta_{ij}^{-1}K_j\,\delta/\delta J_j:\langle 0|\mathrm{T}\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}\\ &=:\mathcal{K}\epsilon a_{im}\phi_m^{\mathrm{as}}:\eta_{ij}^{-1}K_j\langle 0|\mathrm{T}\ i\boldsymbol{\phi}_j\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&[i\epsilon Q, S\boldsymbol{\phi}_k(x)]\\ &\quad=:\mathcal{K}\epsilon a_{im}\phi_m^{\mathrm{as}}:\eta_{ij}^{-1}K_j\langle 0|\mathrm{T}\ i\boldsymbol{\phi}_j\,\boldsymbol{\phi}_k(x)\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}.\end{aligned} \tag{30}$$

これから望みの結果を得るには，Green 関数の生成汎関数に対する WT 恒等式が必要となる。Q は自発的に破れていない対称性の電荷演算子であるから，真空は不変，$Q|0\rangle=0$，であり†，したがって (20) を使って

$$0=\langle 0|\mathrm{T}[i\epsilon Q,\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l]|0\rangle=\langle 0|\mathrm{T}\ iJ_i\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_i\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle \tag{31}$$

なる WT 恒等式を，さらに，これを $J_k(x)$ で微分して

$$0=\langle 0|\mathrm{T}[\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_k(x)+i\boldsymbol{\phi}_k(x)J_i\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_i]\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle \tag{32}$$

を，それぞれ得る。これらの恒等式に，(28) の演算子 $:\mathcal{K}:$ を施せば，(31), (32) の外場 $J_i(x)$ はすべて $\phi_i^{\mathrm{as}}\eta_{ij}^{-1}K_j$ で置き換えられることになる。このとき，$\phi_i^{\mathrm{as}}(x)$ は質量殻 $p^2=m_i^2$ 上の関数で，Klein-Gordon 演算子 K_j は伝播関数の逆 $m_j^2-p^2=m_i^2-p^2$ であるから，この演算の下では，J_i の掛かって

† 6-1 参照。

いる“複合”Heisenberg 演算子 $\delta\boldsymbol{\phi}_i$ には，そのチャネルで $\boldsymbol{\phi}_i$ の質量 m_i と**同じ質量**の **1 粒子 pole** 部分しか効かない。それゆえ，(22) と (21) を考慮すれば，

$$\delta\boldsymbol{\phi}_i(x) \underset{\text{質量殻上}}{\Longrightarrow} a_{ij}\,\boldsymbol{\phi}_j(x) \tag{33}$$

の置き換えができることがわかる。したがって，(31),(32) の Green 関数 WT 恒等式は，次の (質量殻上)S 行列 WT 恒等式に帰着する：

$$:\mathcal{K}:\langle 0|\mathrm{T}\,J_i\,\epsilon a_{ij}\boldsymbol{\phi}_j \exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}=0, \tag{34}$$

$$:\mathcal{K}:\langle 0|\mathrm{T}\,(\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_k(x)+iJ_i\,\epsilon a_{ij}\,\boldsymbol{\phi}_j\,\boldsymbol{\phi}_k(x))\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}=0. \tag{35}$$

係数行列 a_{ij} は，そもそも (25) の関係式から，$m_i=m_j$ のときのみ 0 でないことが明らかであるので，

$$K_i\,a_{ij}=a_{ij}\,K_j$$

が成立することに注意して，(34),(35) はさらに

$$:\mathcal{K}\phi_m^{\mathrm{as}}:\eta_{mi}^{-1}\epsilon a_{ij}\,K_j\langle 0|\mathrm{T}\;\boldsymbol{\phi}_j\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}=0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&:\mathcal{K}:\langle 0|\mathrm{T}\;\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_k(x)\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}\\&\quad=-i:\mathcal{K}\phi_m^{\mathrm{as}}:\eta_{mi}^{-1}\epsilon a_{ij}\,K_j\langle 0|\mathrm{T}\;\boldsymbol{\phi}_j\,\boldsymbol{\phi}_k(x)\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0},\end{aligned} \tag{37}$$

と書き直せる。ところが，(15) の変換の係数行列 a_{ij} は，Jacobi 恒等式

$$\begin{aligned}&[i\epsilon Q,[\phi_i^{\mathrm{as}}(x),\phi_j^{\mathrm{as}}(y)\}]\\&\quad=[[i\epsilon Q,\phi_i^{\mathrm{as}}(x)],\phi_j^{\mathrm{as}}(y)\}+[\phi_i^{\mathrm{as}}(x),[i\epsilon Q,\phi_j^{\mathrm{as}}(y)]\}\end{aligned} \tag{38}$$

で左辺が ((17) は c 数なので) 0 であることから，

$$\epsilon a_{ik}[\phi_k^{\mathrm{as}}(x),\phi_j^{\mathrm{as}}(y)\}=(-)^{1+|i||\epsilon|}\epsilon a_{jk}[\phi_i^{\mathrm{as}}(x),\phi_k^{\mathrm{as}}(y)\} \tag{39}$$

を満たさねばならない。$(-)^{|i||\epsilon|}$ は以前に定義した符号因子で $\phi_i^{\mathrm{as}}\epsilon=(-)^{|i||\epsilon|}\epsilon\phi_i^{\mathrm{as}}$ を用いた。このことと，(17) を用いれば，(39) より

$$\phi_m^{\mathrm{as}}\,\eta_{mi}^{-1}\epsilon a_{ij}=(-)^{1+|i||\epsilon|}\phi_m^{\mathrm{as}}\epsilon a_{im}\,\eta_{ij}^{-1}=-\epsilon a_{im}\,\phi_m^{\mathrm{as}}\,\eta_{ij}^{-1} \tag{40}$$

が成り立つことがわかり，WT 恒等式 (36) と，(37) の右辺は，それぞれ，問題の (29) と (30) の右辺にちょうど一致していることになる。したがって，

$$[i\epsilon Q,S]=0, \tag{41}$$

$$[i\epsilon Q,S\boldsymbol{\phi}_k(x)]=\,:\mathcal{K}:\langle 0|\mathrm{T}\;\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_k(x)\exp iJ_l\boldsymbol{\phi}_l|0\rangle|_{J=0}=S\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_k(x), \tag{42}$$

が結論される。ただし (42) の第 2 の等号では $\mathcal{O}=\epsilon\delta\boldsymbol{\phi}_k(x)$ の GLZ 公式を用いた。(41) は S 行列演算子 S が保存量 Q の下で不変であることを一般的に証明したことに相当し，さらに (42) は，望みの，漸近場に対する Q の線形変換が Heisenberg 場に対するもとの一般には非線形の変換 (20) を再

現していることを示している。

これで，一般に保存電荷 Q は必ず漸近場の線形変換を起こすこと，したがって Q を漸近場で表すと双一次形式 (2 次式) になること，を証明した。これは大変適用範囲が広く，例えば，エネルギー・運動量 P_μ や Lorentz 変換生成子 $M_{\mu\nu}$ などが，漸近場で表すと自由場の表式となる，という事実もこの例である。もう一つ，上で Green 関数 WT 恒等式 (31) から質量殻上の情報——S 行列 WT 恒等式 (34) を導いた手続きが，前節の最後に摂動の g^2 レベルで 4 点 Green 関数 WT 恒等式に対して行った議論を全く一般的，系統的に行ったことに相当している，という点に注意しておこう。

摂動論における漸近場の BRS 変換　この注意に関連して，**5-6** で議論した形式的摂動論に現れる漸近場†

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x) &\underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} Z_3{}^{1/2} A_\mu^{\mathrm{as}}(x), \\
(\psi(x), \bar{\psi}(x)) &\longrightarrow Z_2{}^{1/2}(\psi^{\mathrm{as}}(x), \bar{\psi}^{\mathrm{as}}(x)) \\
(c(x), \bar{c}(x)) &\longrightarrow \tilde{Z}_3{}^{1/2}(c^{\mathrm{as}}(x), \bar{c}^{\mathrm{as}}(x))
\end{aligned}
\tag{43}
$$

の BRS 変換を上の方法でまず決定し，それから S 行列 WT 恒等式がいともたやすく導けることを示そう。(43) のくりこみ定数 Z_3, $\tilde{Z}_3$ は **5-6** (57) で定義したものであり，Z_2 は Dirac 場のそれで，

$$
\mathrm{F.T.}\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle\Big|_{\text{離散的 pole 部分}} = \frac{1}{i}\frac{Z_2}{m-\not{p}} \tag{44}
$$

となるものである。

さて，(くりこまれていない) Heisenberg 場の BRS 変換は，**5-4** での定義より

$$
[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, A_\mu(x)] = \lambda D_\mu c(x), \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, \psi(x)] &= ig\lambda c^a(x) T^a \psi(x), \\
[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, \bar{\psi}(x)] &= -ig\lambda c^a(x)\bar{\psi} T^a,
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, c(x)] = -\frac{g}{2}\lambda c(x)\times c(x), \tag{47}
$$

$$
[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, \bar{c}(x)] = i\lambda B(x), \tag{48}
$$

で与えられる。上で説明したように，これらの式から漸近場の変換則を得るには，左右両辺，特に右辺の“複合” Heisenberg 場，の漸近的極限，すなわち離散的 pole 部分を調べればよい。摂動論では，展開の任意の (有限)

† A_μ^a, c^a, $\bar{c}^a$, についている群 G の添字 a は適宜省略する。

次数において，結合状態 (bound state) は現れず，漸近場は (43) で与えたものがすべてである。それゆえ，(46) の右辺の"複合" Heisenberg 場 $c^a(x)T^a\psi(x)$，$c^a(x)\bar{\psi}(x)T^a$ は，FP ゴースト数 $N_{\rm FP}=+1$ とフェルミオン数 ±1 とを同時に持つ演算子で，そのようなチャネルには「漸近場＝離散的 pole 部分」が存在せず，

$$c^a(x)T^a\psi(x) \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad c^a(x)\bar{\psi}(x)T^a \longrightarrow 0, \tag{49}$$

が結論され，(46) の $x_0\to\pm\infty$ 極限は

$$[i\lambda Q_{\rm B}, \psi^{\rm as}(x)]=0, \qquad [i\lambda Q_{\rm B}, \bar{\psi}^{\rm as}(x)]=0, \tag{50}$$

を導く。すなわち Dirac 粒子漸近場は BRS 不変である。同様に $(c\times c)^a=f^{abc}c^b(x)c^c(x)$ のチャネルは FP ゴースト数 $N_{\rm FP}=+2$ の量子数を持ち，漸近場が存在しないから，(47) より

$$[i\lambda Q_{\rm B}, c^{\rm as}(x)]=0 \tag{51}$$

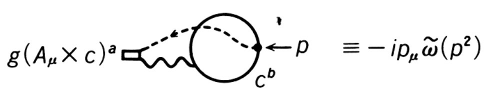
が従う。次に (45) の右辺の演算子 $D_\mu c(x)=\partial_\mu c(x)+gA_\mu(x)\times c(x)$ は Lorentz ベクトルで FP ゴースト数 $N_{\rm FP}=1$ の量子数を運ぶが，$N_{\rm FP}=1$ の漸近場はスカラーの $c^{\rm as}(x)$ のみであるから $D_\mu c(x)$ の漸近的極限は必ず $\partial_\mu c^{\rm as}(x)$ に比例し

$$D_\mu c(x) \longrightarrow Y^{1/2}\partial_\mu c^{\rm as}(x), \qquad Y^{1/2}=\tilde{Z}_3{}^{1/2}[1+\tilde{\omega}(0)] \tag{52}$$

の形をとる。"くりこみ"定数 $Y^{1/2}$ のうち $\tilde{Z}_3{}^{1/2}\times1$ は，$D_\mu c$ の中の $\partial_\mu c$ の部分の寄与であり，残りの部分の $\tilde{\omega}(0)$ は，上の (23) あたりの説明から理解できるように，5·17 図の Feynman グラフ (c^b 側のゴースト 2 点関数の足を切ったもの) の寄与 $\tilde{\omega}(p^2)$，のゴースト pole $p^2=0$ での値として計算されるものである。[5·17 図のグラフは，すでに前節の 5·14 図中にも現れていたことに注意せよ。]

ところが，実は，(52) の"複雑"なくりこみ定数 $Y^{1/2}$ は，FP ゴースト場のくりこみ定数 $\tilde{Z}_3{}^{1/2}$ の逆数であることが，**5-6** (20)，(21) の WT 恒等式，

$$\begin{aligned}\text{F.T.}[\langle 0|\mathrm{T}\,D_\mu c^a(x)\bar{c}^b(y)|0\rangle &= -i\langle 0|\mathrm{T}\,A_\mu^a(x)B^b(y)|0\rangle]\\ &= i\delta^{ab}p_\mu/p^2\end{aligned} \tag{53}$$



5·17 図

から従う。この右辺の pole $1/p^2$ が重み 1 で現れており，しかるに，左辺の $\bar{c}^b(y)$ は $\tilde{Z}_3{}^{1/2}\,\bar{c}^{b,\mathrm{as}}(x)$ の漸近形を持つくりこまれていない Heisenberg 場だからである。同じ WT 恒等式 (53) によって，NL 場 $B^a(x)$ のくりこみ定数 $Z_B{}^{1/2}$ がゲージ場 $A^a_\mu(x)$ のそれ $Z_3{}^{1/2}$ の逆数であった [**5-6** (63)] ことも思い出しておこう。それゆえ，$D_\mu c(x), B(x)$ の漸近形は

$$D_\mu c(x) \longrightarrow \tilde{Z}_3^{-1/2}\partial_\mu c^{\mathrm{as}}(x), \qquad B(x) \longrightarrow Z_3^{-1/2}B^{\mathrm{as}}(x) \tag{54}$$

となり，(45),(48) の $x_0 \to \pm\infty$ 極限から

$$[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, A^{\mathrm{as}}_\mu(x)] = (Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2}\lambda\partial_\mu c^{\mathrm{as}}(x), \tag{55}$$

$$[i\lambda Q_{\mathrm{B}}, \bar{c}^{\mathrm{as}}(x)] = (Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2}i\lambda B^{\mathrm{as}}(x), \tag{56}$$

が結論される。右辺のくりこみ因子 $(Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2}$ は，WT 恒等式のおかげで，(55),(56) 共通になっていることに注意せよ。このくりこみ因子は，$(Z_3\tilde{Z}_3)^{1/2}Q_{\mathrm{B}}$ を新たに Q_{B} と定義し直せば吸収できる。もしくは Q_{B} を変えずに，FP ゴーストのスケール変換 **5-5** (29) を行い，

$$c'^{\mathrm{as}} = e^\rho c^{\mathrm{as}}, \qquad \bar{c}'^{\mathrm{as}} = e^{-\rho}\bar{c}^{\mathrm{as}}, \qquad e^\rho \equiv (Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2} \tag{57}$$

としたものを，新たなゴースト漸近場 $c^{\mathrm{as}}, \bar{c}^{\mathrm{as}}$ と定義しても吸収できる。とにかく，どちらかを採用し，以後 (55),(56) の右辺の因子 $(Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2}$ は落とす。

以上で摂動論における漸近場の BRS 変換がすべて決定されたのだが，これらを **5-6** で定義した各モードの生成・消滅演算子に対する変換則に直しておこう。まず，(55) の右辺 $\partial_\mu c^{\mathrm{as}}(x)$ がスカラーの微分で本質的に縦波ベクトル $\pm ik_\mu e^{\pm ikx}$ の 1 モードしか含んでいないことに注意すれば，(55) の左辺 $A^{\mathrm{as}}_\mu(x)$ の中のそれに直交する三つのモード，二つの横波モードとスカラー波モード，は BRS 不変であることがわかる：

$$[Q_{\mathrm{B}}, a(\boldsymbol{k}, \pm)] = 0, \tag{58}$$

$$[Q_{\mathrm{B}}, a(\boldsymbol{k}, \mathrm{S})] = 0. \tag{59}$$

残る縦波モード $a(\boldsymbol{k}, \mathrm{L})$ は，その偏極平面波 $f^{(\mathrm{L})}_{\boldsymbol{k},\mu}(x)$ がスカラー場平面波 $g_{\boldsymbol{k}}(x)$ の微分 $\partial_\mu g_{\boldsymbol{k}}(x)$ に一致するよう構成してあった [**5-6** (49)] ことと **5-6** (33),(46) を考慮して，

$$[iQ_{\mathrm{B}}, a(\boldsymbol{k}, \mathrm{L})] = c(\boldsymbol{k}) \tag{60}$$

を満たすことがわかる。また，$B^{\mathrm{as}} = -\partial^\mu A^{\mathrm{as}}_\mu$ (Feynman ゲージ $\alpha_{\mathrm{r}}=1$) のモード展開式 **5-6** (50) に注意すれば，(56) は

$$\{Q_{\mathrm{B}}, \bar{c}(\boldsymbol{k})\} = B(\boldsymbol{k}) \equiv -a(\boldsymbol{k}, \mathrm{S}) \tag{61}$$

を導く。さらに (50),(51) より

$$\{Q_B, b(\boldsymbol{p}, s)\} = \{Q_B, d(\boldsymbol{p}, s)\} = 0, \tag{62}$$

$$\{Q_B, c(\boldsymbol{k})\} = 0 \tag{63}$$

が従う。$b(\boldsymbol{p}, s)$, $d(\boldsymbol{p}, s)$ は Dirac 粒子，反粒子の消滅演算子である。(58)～(63) は消滅演算子に対する BRS 変換則であるが，生成演算子に対する変換則はそれらの hermite 共役をとれば得られる。

(58)～(63) の変換則を眺めると，摂動論に現れる粒子モードは，結局，BRS 変換で非自明な変換をする系列

$$\begin{aligned} a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}, \mathrm{L}) &\xrightarrow{Q_B} -ic^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}) \xrightarrow{Q_B} 0, \\ \bar{c}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}) &\xrightarrow{Q_B} -a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}, \mathrm{S}) \xrightarrow{Q_B} 0, \end{aligned} \tag{64}$$

のモードと，自明な BRS 変換をする，すなわち BRS 不変な，モード

$$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}, \pm), b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, s), d^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, s) \xrightarrow{Q_B} 0 \tag{65}$$

とに分離していることがわかる。

いったん，漸近場のモードの BRS 変換を見出せば，あらゆる S 行列 WT 恒等式はほとんど自明な形で導ける。(65) の自明な BRS 変換をするモード，すなわち，ゲージ場の横波モードおよび Dirac 粒子，反粒子モードは **5-6** で見たように正定値計量を持ち，これらのモードのみで構成された状態

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}_1, \pm)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{k}_l, \pm) b^\dagger(\boldsymbol{p}_1, s_1)\cdots b^\dagger(\boldsymbol{p}_m, s_m) d^\dagger(\boldsymbol{q}_1, t_1)\cdots d^\dagger(\boldsymbol{q}_n, t_n)|0\rangle \equiv |\alpha\rangle \tag{66}$$

は，明らかに，すべてのモードが Q_B と可換だから，

$$Q_B|\alpha\rangle = 0 \tag{67}$$

を満たし，すべて物理的状態 $|\alpha\rangle \in \mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ である。それゆえ，(65) のモードを物理的モードと呼ぶ。ここまで，漸近場の生成・消滅演算子に in, out の添字を省略してきたが，もちろん，in と out の 2 種類あり，どちらも全く**同じ形**の BRS 変換性（およびあらゆる保存電荷の下での変換性）を満たすわけである。in の生成演算子で作られた (66) の形の物理的状態 $|\alpha\ \mathrm{in}\rangle$ から, out で作られたそれ $|\alpha'\ \mathrm{out}\rangle$ への S 行列要素 $\langle\alpha'\ \mathrm{out}|\alpha\ \mathrm{in}\rangle$ に関しては，それらの物理的モードが BRS 変換で自明なので何の制限も出ない。しかし, (64) の非自明な BRS 変換をするモード, すなわち, ベクトル場の縦波・スカラー波および FP ゴースト・反ゴーストの四つのモード，の関与する S 行列に対しては，BRS 不変性が強い制限——S 行列 WT 恒等式——を

与える。この四つのモードが正に問題の不定計量をもたらす厄介者の非物理的モードであったことを思い起こそう。ちょうど，その非物理的モードの振舞いだけを BRS 不変性がうまくコントロールするのである。実際，$|\alpha\,\mathrm{in}\rangle$ と $|\alpha'\,\mathrm{out}\rangle$ を (66) の形の物理的 in, out モードだけでつくられた任意の状態とすれば，$Q_{\mathrm{B}}|\alpha\,\mathrm{in}\rangle=\langle\alpha'\,\mathrm{out}|Q_{\mathrm{B}}=0$ だから，明らかに

$$0=\langle\alpha'\,\mathrm{out}|\{Q_{\mathrm{B}},\ \phi_{1,\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_1)\cdots\phi_{m,\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_m)\phi^{\dagger}_{1,\mathrm{in}}(\boldsymbol{q}_1)\cdots\phi^{\dagger}_{n,\mathrm{in}}(\boldsymbol{q}_n)\}|\alpha\,\mathrm{in}\rangle \quad (68)$$

の恒等式が任意の非物理的モードの生成・消滅演算子

$$\phi^{(\dagger)}_{i,\mathrm{as}}(\boldsymbol{k})=a^{(\dagger)}_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k},\mathrm{L}),\ a^{(\dagger)}_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k},\mathrm{S}),\ c^{(\dagger)}_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k}),\ \bar{c}^{(\dagger)}_{\mathrm{as}}(\boldsymbol{k}) \quad (69)$$

に対して成り立つ。(68) は，**5-6** (1) で与えた Green 関数に対する WT 恒等式のつくり方と形式的に同じで，すべての S 行列 WT 恒等式を (Green 関数を経由しないで) 直接与えるものである。例えば，$m=2,\ n=0$ で $\phi_1(\boldsymbol{k})=\bar{c}(\boldsymbol{k})$，$\phi_2(\boldsymbol{k})=a(\boldsymbol{k},\mathrm{L})$ ととれば，(60), (61) の変換則を用いて

$$\begin{aligned}0&=\langle\alpha'\,\mathrm{out}|\{Q_{\mathrm{B}},\ \bar{c}_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_1)a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_2,\mathrm{L})\}|\alpha\,\mathrm{in}\rangle\\&=\langle\alpha'\,\mathrm{out}|[-a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{S})a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_2,L)+i\bar{c}_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_1)c_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{k}_2)]|\alpha\,\mathrm{in}\rangle,\end{aligned} \quad (70)$$

すなわち，S 行列要素間の関係式

$$\langle\alpha'|a(\boldsymbol{k}_1,\mathrm{S})a(\boldsymbol{k}_2,\mathrm{L})S|\alpha\rangle=i\langle\alpha'|\bar{c}(\boldsymbol{k}_1)c(\boldsymbol{k}_2)S|\alpha\rangle \quad (71)$$

を得る。これは，ちょうど前節で具体的に求めた **5-7** (34) の S 行列 WT 恒等式の (任意の物理的状態 $|\alpha\rangle, |\alpha'\rangle$ でかつ摂動の任意の次数で成立する) 一般化である。この例でもわかるように，漸近場の BRS 変換が求まれば，即座にすべての S 行列 WT 恒等式が (68) で書け，この意味で，漸近場の BRS 変換は S 行列 WT 恒等式の凝縮した表現なのである。

5-9　物理的 S 行列のユニタリー性 II：BRS 代数と 4 重項機構

この節では，BRS 代数の表現という立場からあらゆる可能な漸近場を分類し，摂動論によらない形で，前節から始めた物理的 S 行列のユニタリー性の証明を完結する。

BRS 代数の表現　前節最後の小節では，形式的摂動論に現れる漸近場のモードを分析したが，ひるがえって考えるに，そもそも漸近場が保存電荷 Q の下で線形に変換するということは，**漸近場の 1 粒子状態は必ず保存電荷 Q のなす代数の表現になる**ということを意味することに気付く。すなわち，どういう漸近場が現れ得るか，という問題は，摂動論を超えて，単に

種々な保存電荷 Q のなす代数の表現, を考えるだけで多くが規定される。

したがって，BRS 変換の下でどのような変換を受ける漸近場が可能かは，5-5 (34) ～ (36) で与えた，BRS 電荷 Q_B と FP ゴースト電荷 Q_c のなす代数

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\{Q_B, Q_B\} = Q_B^2 = 0, \\ &[iQ_c, Q_B] = Q_B, \\ &[Q_c, Q_c] = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

により決定される。この代数を BRS 代数と呼ぼう。Q_B, Q_c は共に，エネルギー・運動量 P_μ, 角運動量 $M_{\mu\nu}$, カラー電荷 Q^a [5-5 (57)] などの他の保存電荷と可換なので，漸近場の 1 粒子状態は，これらの保存量子数が同時に指定された，BRS 代数 (1) の既約表現，として分類できる。

BRS 代数の既約表現は，Q_B のベキ零性 $Q_B^2=0$ のため，極めて簡単で，高々 2 次元表現である。すなわち 1 重項 (singlet) か 2 重項 (doublet) しかない：

i) BRS 1 重項

漸近場の 1 粒子状態を，その FP ゴースト数 $N_{FP}=iQ_c$ を N，他のエネルギー・運動量，スピンなどの量子数をひっくるめて k として，$|k, N\rangle$ で記すことにする。このとき，状態 $|k, N\rangle$ が

$$Q_B|k, N\rangle = 0 \qquad (2)$$

を満たし，かつ，$|k, N\rangle = Q_B|X\rangle$ と書けるような $|X\rangle$ が存在しない場合，$|k, N\rangle$ を BRS 1 重項と呼ぶ。

ii) BRS 2 重項

もし 1 粒子状態 $|k, N\rangle$ が $Q_B|k, N\rangle=0$ を満たさなかったら，

$$|k, N+1\rangle \equiv Q_B|k, N\rangle \qquad (3)$$

は, (1) の第 2 式により FP ゴースト数 N_{FP} が $N+1$ の状態で, 初めの $|k, N\rangle$ と共に BRS 代数 (1) の 2 重項表現の基底を与える。

$$|k, N\rangle \xrightarrow{Q_B} |k, N+1\rangle \xrightarrow{Q_B} 0. \qquad (4)$$

一般に, 2 重項の中の $|k, N\rangle$ を BRS 親 (parent) 状態, それに Q_B を施して得られる $|k, N+1\rangle$ を BRS 子供 (daughter) 状態，と呼ぶことにする。BRS 子供状態は Q_B のベキ零性から，もはや BRS 変換を受けない：$Q_B|k, N+1\rangle=0$.

BRS 2 重項が一つあれば，必ず，もう一つその相棒となる BRS 2 重項が存在することが次のように示せる。まず，BRS 2 重項の子供状態は零ノルムであることに注意する。

$$\langle k, N+1 | k, N+1\rangle = \langle k, N | Q_{\mathrm{B}}^2 | k, N\rangle = 0. \tag{5}$$

それゆえ，子供状態 $|k, N+1\rangle$ には必ず相棒状態 $|k, -(N+1)\rangle$ が存在してそれとの内積が $\langle k, -(N+1)|k, N+1\rangle \neq 0$ を満たさねばならない。なぜなら，内積が 0 でない相棒状態がなければ，そもそも $|k, N+1\rangle$ 状態がいかなる Green 関数にも pole をつくり得ず，その存在自体が，認識されないはずだからである。この相棒状態 $|k, -(N+1)\rangle$ は，その記法の示す通り，$|k, N+1\rangle$ と 0 でない内積を持つためには P_μ のような hermite 保存量については $|k, N+1\rangle$ と同じ量子数 k を，反 hermite な FP ゴースト数 $N_{\mathrm{FP}} = iQ_c$ については $|k, N+1\rangle$ と逆符号の量子数 $-(N+1)$ を，運ぶ状態でなければならない。相棒状態の規格化を

$$\langle k, -(N+1) | k, N+1\rangle = 1 \tag{6}$$

で固定しておこう。重要な点は，この相棒状態 $|k, -(N+1)\rangle$ は別の BRS 2 重項の親状態となっていることである。なぜなら，それを BRS 変換した状態

$$|k, -N\rangle \equiv Q_{\mathrm{B}} |k, -(N+1)\rangle \tag{7}$$

は，次の "WT 恒等式" から 0 でないことがわかるからである：

$$\begin{aligned}\langle k, N | k, -N\rangle &= \langle k, N | Q_{\mathrm{B}} | k, -(N+1)\rangle \\ &= \langle k, N+1 | k, -(N+1)\rangle = 1.\end{aligned} \tag{8}$$

こうして，**BRS 2 重項は常に 2 組，対になって現れる，**

$$\begin{array}{ccccccc} |k, N\rangle & \xrightarrow{Q_{\mathrm{B}}} & |k, N+1\rangle & \xrightarrow{Q_{\mathrm{B}}} & 0 & & \\ & & \updownarrow & & & & \\ & & |k, -(N+1)\rangle & \xrightarrow{Q_{\mathrm{B}}} & |k, -N\rangle & \xrightarrow{Q_{\mathrm{B}}} & 0 \end{array} \tag{9}$$

ということがいえた。ここで点線は，(8) の示すように，0 でない内積を持つ相棒状態をつなぎ，二つの内積は等しい。(9) のような内積で対をなす 2 組の BRS 2 重項表現は，BRS 代数の表現として基本的なもので，2 組をまとめて，**BRS 4 重項** (quartet) と呼ぶ。

以上より，BRS 代数の表現は，(2) でいった BRS 1 重項と (9) の BRS 4 重項＝"BRS 2 重項の対"，しかないことを示した。これは摂動論によらない議論で，非可換ゲージ理論に現れる漸近場は，"素粒子" であろうが結合

状態であろうが，何でもこの表現のどちらかになっていることをいっているのである。

前節最後に述べた摂動論に現れる漸近場を見てみると，確かに，5-8 (64) に示したゲージ場の縦波・スカラー波と FP ゴースト・反ゴーストの四つのモードが BRS 4 重項表現に，5-8 (65) に示したゲージ場横波モードと Dirac 粒子・反粒子が BRS 1 重項表現に，それぞれ属していることがわかる。

次に漸近場の計量構造について考えよう。まず，BRS 1 重項モードに関しては，BRS 不変性はその計量について何もいわない。しかも，(2) の 1 重項状態 $|k, N\rangle_{1重項}$ を作る生成演算子を $a_k^\dagger$，$|k, N\rangle_{1重項} \equiv a_k^\dagger|0\rangle$，と定義すれば，1 重項状態の BRS 不変性から

$$[Q_\mathrm{B}, a_k^\dagger\} = [Q_\mathrm{B}, a_k\} = 0 \tag{10}$$

が従うので，このモードは何個でも $Q_\mathrm{B}|\mathrm{phys}\rangle = 0$ で指定される物理的部分空間 $\mathcal{V}_\mathrm{phys}$ に自由に現れることになる。それゆえ，理論が物理的に無矛盾であるためには，これら **BRS 1 重項モードはすべて正定値計量を持たねばならない**：すなわち

$$[a_k, a_l^\dagger\} = +\delta_{kl}. \tag{11}$$

全くの一般論を展開しているここでは，これを**仮定**する。もちろん，この仮定が正しいかどうかは，個々の理論のダイナミクスを解いて確かめるべきことである。5-6 の形式的摂動論の場合は，確かに，ゲージ場横波モード，Dirac 粒子・反粒子の BRS 1 重項モードはすべて正定値計量を持っていた。

BRS 1 重項モードが正定値であるという仮定は，特に，BRS 1 重項 (の 1 粒子状態) $|k, N\rangle$ はすべて FP ゴースト数 $N_\mathrm{FP} = N$ が 0 の状態しかない，という仮定を含んでいることに注意しておこう。もし $N \neq 0$ の BRS 1 重項状態 $|k, N\rangle$ があったとすると，それはゴースト数の保存則から零ノルム，$\langle k, N|k, N\rangle = 0$，であることがわかるから，上の BRS 2 重項対の場合の議論と同様に，必ず，FP ゴースト数が逆符号の状態 $|k, -N\rangle$ で

$$\langle k, -N|k, N\rangle = 1 \tag{12}$$

を満たすものがなければならない。また，この相棒状態 $|k, -N\rangle$ も BRS 1 重項である。なぜなら，もし BRS 2 重項なら，上で示したように，その相棒も BRS 2 重項となり元の仮定に矛盾するからである。そこで，この BRS 1 重項対状態の生成演算子を

$$|k, N\rangle = \sigma_k^\dagger|0\rangle, \qquad |k, -N\rangle = \bar{\sigma}_k^\dagger|0\rangle \tag{13}$$

で定義すれば，これらの状態の BRS 不変性と内積 (12) から

$$[Q_{\rm B}, \sigma_k^{(\dagger)}\} = [Q_{\rm B}, \bar{\sigma}_k^{(\dagger)}\} = 0, \tag{14}$$

$$[\sigma_k, \bar{\sigma}_l^\dagger\} = [\bar{\sigma}_k, \sigma_l^\dagger\} = \delta_{kl} \tag{15}$$

が従う。ところが，(15) のような“反対角”交換関係は FP ゴースト漸近場の場合と同様，必ず，負計量状態が存在することを意味する。例えば

$$|1\rangle = (\sigma_k^\dagger - \bar{\sigma}_k^\dagger)|0\rangle, \qquad |2\rangle = \sigma_k^\dagger \bar{\sigma}_k^\dagger|0\rangle \tag{16}$$

などは ($|2\rangle$ は σ_k, $\bar{\sigma}_k$ が Fermi 統計に従うとき) 負ノルム状態である。

BRS 4 重項の計量構造　興味あることに，BRS 4 重項に属する粒子の計量構造は，全く一般に，BRS 不変性だけから完全に決定される。(9) の BRS 4 重項の各状態に対応する生成・消滅演算子を

$$\begin{aligned} |k, N\rangle &\equiv \chi_k^\dagger|0\rangle, & -|k, -N\rangle &\equiv \beta_k^\dagger|0\rangle, \\ i|k, N+1\rangle &\equiv \gamma_k^\dagger|0\rangle, & -|k, -(N+1)\rangle &\equiv \bar{\gamma}_k^\dagger|0\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

および，その hermite 共役で導入する。(9) に属する二つの BRS 親状態，$|k, N\rangle$ と $|k, -(N+1)\rangle$，のうちどちらかが偶数の FP ゴースト数を持つから，一般性を失わず，以後 N を偶数とする。そうすれば，χ_k と β_k モードがボソン，γ_k と $\bar{\gamma}_k$ がフェルミオンである†。(9) の BRS 変換性は

$$\begin{aligned} [Q_{\rm B}, \chi_k^{(\dagger)}] &= -i\gamma_k^{(\dagger)}, & \{Q_{\rm B}, \gamma_k^{(\dagger)}\} &= 0, \\ \{Q_{\rm B}, \bar{\gamma}_k^{(\dagger)}\} &= \beta_k^{(\dagger)}, & [Q_{\rm B}, \beta_k^{(\dagger)}] &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

を意味する。さらに，(8) に示した内積の“WT 恒等式”は

$$-[\chi_k, \beta_l^\dagger] = -i\{\gamma_k, \bar{\gamma}_l^\dagger\} = \delta_{kl} \tag{19}$$

を導く。また，FP ゴースト数が互いに逆符号の状態間しか (0 でない) 内積が存在しないことから，次の (反) 交換関係は 0 であることがわかる：

$$[(\chi_k, \beta_k), (\gamma_l^\dagger, \bar{\gamma}_l^\dagger)] = \{\gamma_k, \gamma_l^\dagger\} = \{\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_l^\dagger\} = 0 \tag{20}$$

BRS 子供状態は，(5) で述べたように零ノルムであるから

$$[\beta_k, \beta_l^\dagger] = 0 \tag{21}$$

も従う。これら以外の組合せは唯一 $[\chi_k, \chi_l^\dagger]$ であるが，これは BRS 不変性からは決まらず，一般的に

$$[\chi_k, \chi_l^\dagger] = \omega_{kl} \tag{22}$$

---

† もし，この BRS 4 重項が，Dirac 粒子などの純正のフェルミオン奇数個の結合状態であれば，統計が逆になる。その場合は，しかし，N を奇数の方にとり，常に χ_k, β_k がボソンになるようにする。

としておこう。(19)～(22)の(反)交換関係をまとめると，結局，BRS 4 重項のモード

$$\phi_k \equiv (\chi_k, \beta_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k) \tag{23}$$

は，次の計量構造を持つことがわかった：

$$[\phi_k, \phi_l^\dagger\} = \begin{array}{c} \\ \chi_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \\ \bar{\gamma}_k \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \chi_l^\dagger & \beta_l^\dagger & \gamma_l^\dagger & \bar{\gamma}_l^\dagger \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} \omega_{kl} & -\delta_{kl} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -\delta_{kl} & 0 & & \\ \hline & & 0 & i\delta_{kl} \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & -i\delta_{kl} & 0 \end{array} \right) \end{array} \equiv \eta_{kl} \tag{24}$$

以上も摂動論によらない議論で，全く一般的なものであるが，もちろん，摂動論での BRS 4 重項もこの計量構造を持っている。その場合のモードの対応は

$$(\chi_k, \beta_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k) = \Big(a^a(\boldsymbol{k}, \mathrm{L}), B^a(\boldsymbol{k}) = -a^a(\boldsymbol{k}, \mathrm{S}), c^a(\boldsymbol{k}), \bar{c}^a(\boldsymbol{k})\Big) \tag{25}$$

である。

素 4 重項　ここで，少し寄り道になるが，非可換ゲージ理論には(共変ゲージである限り)，物質場の詳細や摂動論によらず，群 G の添字 a の各々に対して一組ずつ BRS 4 重項が常に存在する，ことがいえるということをコメントしておこう。この 4 重項は“素”(elementary)(すなわち結合状態でない) FP 反ゴースト $\bar{c}^a$ をそのメンバーに含むので，素 4 重項と呼ぶことにする。(25)の 4 重項は，この素 4 重項の摂動論における現れ方の一例である。

この事実は，再び，5-8 (53) でも引用した 5-6 (20), (21) の WT 恒等式

$$\begin{aligned} \text{F.T.}[\langle 0|\mathrm{T}\, D_\mu c^a(x)\, \bar{c}^b(y)|0\rangle &= -i\langle 0|\mathrm{T}\, A_\mu^a(x)\, B^b(y)|0\rangle] \\ &= i\delta^{ab} p_\mu / p^2 \end{aligned} \tag{26}$$

から従う。この WT 恒等式は $p^2=0$ に pole を持つから，$D_\mu c^a$, $\bar{c}^a$, A_μ^a, B^a の各 Heisenberg 演算子に，零質量の漸近場が存在することを示している：すなわち，

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &\xrightarrow[x_0 \to \pm\infty]{} \partial_\mu \chi^a(x) + \cdots, \\ B^a(x) &\longrightarrow \beta^a(x) + \cdots, \\ D_\mu c^a(x) &\longrightarrow \partial_\mu \gamma^a(x) + \cdots, \\ \bar{c}^a(x) &\longrightarrow \bar{\gamma}^a(x) + \cdots, \end{aligned} \tag{27}$$

で定義される零質量の漸近場 χ^a, β^a, γ^a, $\bar{\gamma}^a$ が存在する。点々 $(\cdots)$ と書い

たのは，これら以外にも (26) の pole と無関係な漸近場が存在するかもしれないからである。[上記の摂動論の場合は，(27) 第 1 式の $\chi^a(\boldsymbol{k})$ は縦波モード $Z_3{}^{1/2}a(\boldsymbol{k}, L)$ であり，…は残りの横波・スカラー波モードに対応する。]

(27) の各添字 a ごとの一組の漸近場 $(\chi^a, \beta^a, \gamma^a\ \ \bar{\gamma}^a)$ が BRS 4 重項になっていることは，Heisenberg 場の BRS 変換則 **5-8** (45), (48) からただちに

$$[iQ_{\rm B}, \chi^a(x)] = \gamma^a(x), \qquad \{iQ_{\rm B}, \bar{\gamma}^a(x)\} = i\beta^a(x) \tag{28}$$

が従い，さらに，これらと $Q_{\rm B}^2=0$ から

$$\{iQ_{\rm B}, \gamma^a(x)\} = 0, \qquad [iQ_{\rm B}, \beta^a(x)] = 0 \tag{29}$$

がいえるので，明らかである。これらの漸近場の交換関係に関しても，(26) の WT 恒等式から，すぐ

$$\{\gamma^a(x), \bar{\gamma}^b(y)\} = -i[\chi^a(x), \beta^b(y)] = -\delta^{ab}D(x-y) \tag{30}$$

が従い，さらに，**5-6** (17) の WT 恒等式および FP ゴースト数保存から

$$[\beta^a(x), \beta^b(y)] = \{\gamma^a(x), \gamma^b(y)\} = \{\bar{\gamma}^a(x), \bar{\gamma}^b(y)\} = 0 \tag{31}$$

などが導かれ，すべて，生成・消滅演算子で書けば上の一般論の 4 重項の交換関係 (24) と一致していることがわかる。

後に述べる対称性の自発的に破れたゲージ理論 (の摂動論) では，素 4 重項のメンバー χ^a は，もはやゲージ場の縦波モードではなく非物理的 Higgs モードとなる。また，摂動論の枠外では，複合 Heisenberg 場 $D_\mu c^a$ チャネルに現れる 4 重項メンバー γ^a は，必ずしも，素 Heisenberg 場 c^a の漸近場と同一のものとは限らないことも注意しておこう。

4 重項機構とユニタリー性　さて，いよいよ，本題の物理的 S 行列のユニタリー性を証明しよう。摂動論によらず一般的に証明するため，(18) の BRS 変換性と (24) の計量構造を持った BRS 4 重項は何種類あってもよいとする。それらの種類の違いも (23) に書いた 4 重項 $\phi_k = (\chi_k, \beta_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k)$ の添字 k ですべて区別されると考える。基本的な仮定は，上でも述べたように，BRS 1 重項粒子がすべて正定値計量を持つということである。それでも，全状態空間 $\mathcal{V}$ は，種々な 4 重項粒子モードの存在のために，負ノルム状態をいっぱい含んでいる。今から，$Q_{\rm B}|{\rm phys}\rangle = 0$ で指定される物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys} = \{|{\rm phys}\rangle\}$ には，これら **BRS 4 重項粒子は**，常に，**零ノルムの組合せでしか現れない**こと，したがって，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ **は半正定値計量を持つ**ことを示す。すなわち，我々の世界 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ では BRS 4 重項粒子は有限の

確率では観測されず，常に相互作用領域の中だけに**閉じ込め**られている！これを 4 重項機構 (quartet mechanism) と呼ぶ。

まず，全状態空間 $\mathcal{V}$ の中で，BRS 4 重項粒子を全然含まず，BRS 1 重項粒子だけから成る状態の張る部分空間を $\mathcal{H}_{\rm phys}$ と呼ぼう。BRS 1 重項粒子の生成・消滅演算子を一般に $a_\alpha^\dagger, a_\beta$ と書き，それが

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = +\delta_{\alpha\beta} \tag{32}$$

の対角 (正) 計量 [(11)] を持つとすれば，$\mathcal{H}_{\rm phys}$ への射影演算子 $P^{(0)}$ は

$$P^{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\alpha_m}^\dagger |0\rangle\langle 0| a_{\alpha_m} \cdots a_{\alpha_2} a_{\alpha_1} \tag{33}$$

で与えられる。$\mathcal{H}_{\rm phys}$ は (32) の仮定により正定値計量を持つ。

次に，BRS 4 重項粒子を (種類を問わず) 合計 n 個，BRS 1 重項粒子を任意個，含むような状態からなる部分空間を n- 4 重項粒子セクターと呼ぶ。もちろん $n=0$ セクターは上の $\mathcal{H}_{\rm phys}$ である。この n- 4 重項粒子セクターへの射影演算子 $P^{(n)}$ は，BRS 4 重項粒子の (23) の生成・消滅演算子 $\phi_k^\dagger$, ϕ_k および (24) の計量の逆行列 η_{kl}^{-1} を用いて，

$$P^{(n)} = (1/n!) \phi_{k_1}^\dagger \phi_{k_2}^\dagger \cdots \phi_{k_n}^\dagger P^{(0)} \eta_{k_1 l_1}^{-1} \eta_{k_2 l_2}^{-1} \cdots \eta_{k_n l_n}^{-1} \phi_{l_n} \cdots \phi_{l_2} \phi_{l_1} \tag{34}$$

で与えられる。この表式は，帰納的に

$$P^{(n)} = (1/n) \phi_k^\dagger P^{(n-1)} \eta_{kl}^{-1} \phi_l \qquad (n \geqq 1)$$

と書くこともでき，もっとあらわには，(24) の逆行列 η_{kl}^{-1} を求めて，

$$\begin{aligned} P^{(n)} = (1/n) [&-\beta_k^\dagger P^{(n-1)} \chi_k - \chi_k^\dagger P^{(n-1)} \beta_k - \omega_{kl} \beta_k^\dagger P^{(n-1)} \beta_l \\ &+ i\gamma_k^\dagger P^{(n-1)} \bar{\gamma}_k - i\bar{\gamma}_k^\dagger P^{(n-1)} \gamma_k] \end{aligned} \tag{35}$$

となる。これら (33),(35) の射影演算子 $P^{(n)} (n=0,1,2,\cdots)$ は，明らかに，互いに直交しており，全体で完全である：

$$\begin{aligned} &P^{(n)} P^{(m)} = P^{(m)} P^{(n)} = \delta_{nm} P^{(n)}, \\ &P^{(n)} = P^{(n)\dagger}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} = 1. \end{aligned} \tag{36}$$

これから，帰納法により，$n=1, 2, \cdots$ に対して

i) $[Q_{\rm B}, P^{(n-1)}] = 0$, (37)

ii) $P^{(n)} = \{Q_{\rm B}, R^{(n)}\}$

$$R^{(n)} = -\frac{1}{n} \left[\bar{\gamma}_k^\dagger P^{(n-1)} \chi_k + \frac{1}{2} \omega_{kl} \bar{\gamma}_k^\dagger P^{(n-1)} \beta_l + \text{h.c.} \right] \tag{38}$$

が成立することを示そう。ただし h.c. は hermite 共役量を表す。まず，最初の $n=1$ の場合，$Q_{\rm B}$ は BRS 1 重項粒子 $a_\alpha^{(\dagger)}$ と可換だから，(33) の $P^{(0)}$ に対し $Q_{\rm B} P^{(0)} = P^{(0)} Q_{\rm B} = 0$ で，(37) $[Q_{\rm B}, P^{(0)}] = 0$ は自明である。さらに，この

性質と 4 重項の BRS 変換性 (18) とを用いて $n=1$ の (38) 右辺を計算すれば

$$\{Q_{\mathrm{B}}, R^{(1)}\}=-\Big[\{Q_{\mathrm{B}}, \bar{\gamma}_k^\dagger\}P^{(0)}\chi_k-\bar{\gamma}_k^\dagger P^{(0)}[Q_{\mathrm{B}}, \chi_k] + \frac{1}{2}\omega_{kl}\{Q_{\mathrm{B}}, \bar{\gamma}_k^\dagger\}P^{(0)}\beta_l+\mathrm{h.c.}\Big]$$
$$=-\Big[\beta_k^\dagger P^{(0)}\chi_k+i\bar{\gamma}_k^\dagger P^{(0)}\gamma_k+\frac{1}{2}\omega_{kl}\beta_k^\dagger P^{(0)}\beta_l+\mathrm{h.c.}\Big] \qquad (39)$$

となり (35) の $P^{(1)}$ に一致していることがわかり OK である。(37),(38) が $n=N-1$ のとき成立すれば，$n=N$ では，$P^{(N-1)}$ は前段階の (38) により $\{Q_{\mathrm{B}}, R^{(N-1)}\}$ と書けており，Q_{B} のベキ零性より，$[Q_{\mathrm{B}}, P^{(N-1)}]=0$ は明らか。また，この性質を用いれば，$\{Q_{\mathrm{B}}, R^{(N)}\}$ の計算が (39) と全く同じにできて $P^{(N)}$ と一致していることがわかる。(証明終)

(38) の形 $P^{(n)}=\{Q_{\mathrm{B}}, R^{(n)}\}$ が特に重要な結果で，それからただちに，$Q_{\mathrm{B}}|f\rangle=Q_{\mathrm{B}}|g\rangle=0$ を満たす任意の状態 $|f\rangle, |g\rangle\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に対し，

$$\langle f|P^{(n)}|g\rangle=0 \qquad (n\geqq 1) \qquad (40)$$

が従う。これから次のことがいえる。

任意の物理的状態 $|f\rangle\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ を，BRS 4 重項粒子を含まない成分，1 個含む成分，2 個含む成分，$\cdots$ というふうに (直交) 分解する：

$$|f\rangle=P^{(0)}|f\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}|f\rangle. \qquad (41)$$

ところが，BRS 4 重項粒子を $n(\geqq 1)$ 個含む成分 $P^{(n)}|f\rangle$ は，(40) により

$$\|P^{(n)}|f\rangle\|^2=\langle f|P^{(n)}P^{(n)}|f\rangle=\langle f|P^{(n)}|f\rangle=0 \qquad (n\geqq 1) \quad (42)$$

だから，皆零ノルムとなり，$|f\rangle$ のノルムは (41) の最初の BRS 4 重項を一つも含まない成分 $P^{(0)}|f\rangle\in\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ だけで決定される：

$$\langle f|f\rangle=\langle f|P^{(0)}|f\rangle=\|P^{(0)}|f\rangle\|^2\geqq 0. \qquad (43)$$

すなわち，(BRS 1 重項粒子のみの張る空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ の正定値性の仮定の下で) 物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ は半正定値計量を持つ。したがって，**5-8** の最初の定理の仮定 iii) が成り立つこと，それゆえ，物理的 S 行列 S_{phys} がユニタリーであることが証明された。

ここでいくつか注意を与えておこう。

i) (41) で，$|f\rangle$ を in 漸近場で構成した物理的状態 $|f\ \mathrm{in}\rangle$ とし，$P^{(n)}$ を out 漸近場の生成・消滅演算子で書いた射影演算子にとれば，(41) の右辺は，初期状態 $|f\ \mathrm{in}\rangle$ が散乱を起こした後 (すなわち out 基底で) どのような

状態になっているかを，直接示すものである。そのとき，第2項以降の $P_{\rm out}^{(n)}|f\ {\rm in}\rangle$ $(n\geqq 1)$ は散乱後 BRS 4 重項粒子が 1 個以上生成された状態を表し，上の証明は，それらが皆零ノルム状態であることをいっているわけである。このことを $n=2$ の場合に，もっとあらわな形で見てみよう。物理的初期状態 $|f\ {\rm in}\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys}$ を FP ゴースト数 $N_{\rm FP}=0$ の場合を考え，$\mathcal{H}_{\rm phys}^{\rm out}$ への射影演算子 $P_{\rm out}^{(0)}$ を $\sum_{\alpha}|\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\ {\rm out}|$ と書くことにすれば，散乱後 4 重項粒子が 2 個入っている状態 $P_{\rm out}^{(2)}|f\ {\rm in}\rangle$ は，$P^{(2)}$ の表式 (34) または (35)（で $N_{\rm FP}=0$ 状態の部分）を用いて

$$\begin{aligned}P_{\rm out}^{(2)}|f\ {\rm in}\rangle=\sum_{\alpha,k,l}\Big\{&\frac{1}{2}|\beta_k,\beta_l\,;\,\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\,;\,\chi_l,\chi_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle\\&+|\beta_k,\chi_l\,;\,\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\,;\,\beta_l,\chi_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle\\&+\frac{1}{2}|\chi_k,\chi_l\,;\,\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\,;\,\beta_l,\beta_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle\\&+|\bar{\gamma}_k,\gamma_l\,;\,\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\,;\,\bar{\gamma}_l,\gamma_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle+\cdots\Big\}\end{aligned}\tag{44}$$

となる。ただし，$\beta_{k,{\rm out}}^{\dagger}\chi_{l,{\rm out}}^{\dagger}|\alpha\ {\rm out}\rangle\equiv|\beta_k,\chi_l\,;\,\alpha\ {\rm out}\rangle$ などと記し，ω_{kl} 比例項は簡単のためあらわには書かなかった。この一般的な形 (44) では，各 out 状態の係数——S 行列要素 $\langle\alpha,\phi_l,\phi_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle$ の間の関係をまだ何もいっていない。しかし上で証明した等式 (38) は，この (44) が $P_{\rm out}^{(2)}|f\ {\rm in}\rangle=\{Q_{\rm B},R_{\rm out}^{(2)}\}|f\ {\rm in}\rangle=Q_{\rm B}R_{\rm out}^{(2)}|f\ {\rm in}\rangle$ の形に書き直せること，具体的には $R^{(2)}$ の中の $P^{(1)}$ に (35) の表式を代入して

$$\begin{aligned}P_{\rm out}^{(2)}|f\ {\rm in}\rangle=\sum_{\alpha,k,l}\Big\{&\frac{1}{2}Q_{\rm B}\,\bar{\gamma}_{k,{\rm out}}^{\dagger}\beta_{l,{\rm out}}^{\dagger}|\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\,;\,\chi_l,\chi_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle\\&+\frac{1}{2}Q_{\rm B}\,\bar{\gamma}_{k,{\rm out}}^{\dagger}\chi_{l,{\rm out}}^{\dagger}|\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha\,;\,\beta_l,\chi_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle\\&+\frac{i}{2}Q_{\rm B}\,\chi_{k,{\rm out}}^{\dagger}\bar{\gamma}_{l,{\rm out}}^{\dagger}|\alpha\ {\rm out}\rangle\langle\alpha,\gamma_l,\bar{\gamma}_k\ {\rm out}|f\ {\rm in}\rangle+\cdots\Big\}\end{aligned}\tag{45}$$

と書けること，をいっているのである。(45) の右辺の形は，散乱後の out 状態がすべて零ノルムであることが明白な $Q_{\rm B}|*\ {\rm out}\rangle$ の形，

$$\langle *\ {\rm out}|Q_{\rm B}^{\dagger}Q_{\rm B}|*\ {\rm out}\rangle=\langle *\ {\rm out}|Q_{\rm B}^2|*\ {\rm out}\rangle=0,\tag{46}$$

にまとまることを示している。さらに，(45) 右辺が (44) 右辺に等しいことは，両者を（BRS 変換則 (18) を用いて）比較すれば，すでに **5-8** の (71) や **5-7** の (33), (34) で出会った S 行列 WT 恒等式

$$\langle\alpha\,;\,\beta_l,\beta_k\,\mathrm{out}|f\,\mathrm{in}\rangle=0,$$
$$\langle\alpha\,;\,\beta_l,\chi_k\,\mathrm{out}|f\,\mathrm{in}\rangle=-i\langle\alpha\,;\,\bar{\gamma}_l,\gamma_k\,\mathrm{out}|f\,\mathrm{in}\rangle, \tag{47}$$

を含意していることがわかる。$P^{(n)}$ に対する (38) の表式は，それゆえ，BRS 4 重項粒子が 3 個以上生成される過程に対しても，無数の S 行列 WT 恒等式を含意すると同時に，それらが零ノルム状態の組合せにまとまることを最も効率よく表現しているのである。

ii）　物理的状態 $|f\rangle\in\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ のノルムは BRS 1 重項粒子のみから成る (41) の第 1 成分 $P^{(0)}|f\rangle\in\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ で決定されるので，BRS 1 重項モードを “物理的モード” と呼ぶのは正しい。しかしながら，この “物理的モード” のみで張られた空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ 自体は時間発展に対して不変でない，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{in}}=P_{\mathrm{in}}^{(0)}\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}\neq P_{\mathrm{out}}^{(0)}\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}=\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{out}}, \tag{48}$$

ことは心に留めておくべきである。すなわち，たとえ，BRS 4 重項粒子を全然含まない初期状態 $|\alpha\,\mathrm{in}\rangle\in\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{in}}$ から出発しても，散乱後には，FP ゴーストの対生成のような過程により，一般に 0 でない 4 重項粒子を含む成分 $P_{\mathrm{out}}^{(n)}|\alpha\,\mathrm{in}\rangle$ が現れるのである。また，零質量ベクトル場の横波状態の定義 **5-6** (40) も Lorentz 座標系によるものであり，そのような横波モードが BRS 1 重項モードに入っている場合には，$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ は Lorentz 不変でもないことに注意したい。これに反し，$Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle=0$ で定義される $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}=\{|\mathrm{phys}\rangle\}$ は，したがってその零ノルム部分空間 $\mathcal{V}_0$ も，Lorentz 不変で，かつ，時間発展に対しても不変なのである。上の (41)～(43) は，

$$H_{\mathrm{phys}}\equiv\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}/\mathcal{V}_0\cong\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{as}}(\equiv P^{(0)}\mathcal{V}^{\mathrm{as}})\qquad(\mathrm{as}=\mathrm{in}\text{ または }\mathrm{out}) \tag{49}$$

の同形対応があることを示している。すなわち，$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}^{\mathrm{as}}$ の元は，時間発展・Lorentz 不変な H_{phys} の元＝同値類 $|\hat{f}\rangle$ の一つの代表元なのである。

ついでながら，(38) から $\mathcal{V}_0$ に対して次の興味ある関係式

$$\mathcal{V}_0=\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}=Q_{\mathrm{B}}\mathcal{V} \tag{50}$$

が従うことに注意しておこう。これは，$\mathcal{V}_0$ の元はすべての $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ の元と直交した (**5-8** (7)) から $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ の元とも直交し $P^{(0)}\mathcal{V}_0=0$ であること，また，$Q_{\mathrm{B}}^2=0$ より明らかに $Q_{\mathrm{B}}|*\rangle$ の形の元は $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属し零ノルムであるから $Q_{\mathrm{B}}\mathcal{V}\subset\mathcal{V}_0$ であること，それに (36),(38) を用いて，

$$\mathcal{V}_0=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}\mathcal{V}_0=\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}\mathcal{V}_0$$
$$\subset\sum_{n=1}^{\infty}P^{(n)}\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}=\left\{Q_{\mathrm{B}},\sum_{n=1}^{\infty}R^{(n)}\right\}\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}\subset Q_{\mathrm{B}}\mathcal{V}\subset\mathcal{V}_0 \tag{51}$$

と評価されるからである。

5-10 観測可能量

物理的部分空間$\mathcal{V}_{\rm phys}$の中の零ノルム状態$|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0$は，5-8の初めに述べたように，あらゆる物理的状態$|f\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys}$と直交し，その事実から，零ノルムベクトル$|\chi\rangle$を本質的に無視した空間

$$H_{\rm phys}=\mathcal{V}_{\rm phys}/\mathcal{V}_0 \tag{1}$$

の上で，すべての散乱過程を矛盾なく考えることができた。

しかしながら，もちろん，物理において観測される量はS行列だけではない。エネルギー・運動量や電磁場の強さなども観測されるわけである。そこで，非可換ゲージ理論においてはどのような演算子が観測可能量(observable)なのか，ということが問題になる。

観測可能量　まず，すべての散乱過程が(1)の，時間発展・Lorentz変換の下で不変な正定値Hilbert空間$H_{\rm phys}$の上で無矛盾に記述されたと同様，観測可能量Aも(1)の$H_{\rm phys}$の上で矛盾なく定義できるものでなければならない。すべての演算子はもともと全状態空間$\mathcal{V}$上の場の演算子で書かれているわけで，$\mathcal{V}$上のある演算子Aが$H_{\rm phys}$上でも矛盾なく定義できるということは，Aは零ノルムベクトル$|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0$分の違いを感知しない，すなわち

(I)　$^\forall|f_{1,2}\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys}$，$^\forall|\chi_{1,2}\rangle\in\mathcal{V}_0$に対して，

$$\langle f_1+\chi_1|A|f_2+\chi_2\rangle=\langle f_1|A|f_2\rangle \tag{2}$$

の性質を持つ，という要請である。この要請(I)を満たす演算子Aをゲージ理論における観測可能量と定義する。

観測可能量の演算子Aに対する要請として，(I)と同様に良さそうと思われるものに

(II)　$$A\mathcal{V}_{\rm phys}\subset\mathcal{V}_{\rm phys},\qquad A^\dagger\mathcal{V}_{\rm phys}\subset\mathcal{V}_{\rm phys}, \tag{3}$$

がある。すなわち，物理的状態に$A, A^\dagger$を演算しても物理的状態にとどまれ，という要請である。任意の演算子Aは必ずhermite部分と反hermite部分に分けて考えることができるから，以後，簡単のために一般性を失わずAはhermite演算子であると仮定する。

(II)の要請が満たされていると任意の$|f\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys}$に対し$A|f\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys}$が成り立ち，かつまた，零ノルム部分空間$\mathcal{V}_0$の元$|\chi\rangle$は任意の$\mathcal{V}_{\rm phys}$の

元と直交するから，

$$\forall|f\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}},\ \ \forall|\chi\rangle\in\mathcal{V}_0,\quad \text{に対し}\quad \langle\chi|A|f\rangle=0 \tag{4}$$

が導かれ，(I)の要請が満たされている。一方，**5-8** 初めの定理の一般的条件 i)～iii)の下では，逆の(I)から(II)というのは証明できず，この意味で(II)の要請の方が(I)の要請より強い。しかし，$\mathcal{V}_{\text{phys}}$ が $Q_{\text{B}}|\text{phys}\rangle=0$ で特定される今の場合は，次に示すように，逆も証明できて，(I)と(II)の要請は等価であることがわかる：実際，全空間 $\mathcal{V}$ の任意の状態 $|\Psi\rangle$ に対して，$Q_{\text{B}}|\Psi\rangle$ は零ノルムの物理的状態，$Q_{\text{B}}|\Psi\rangle\in\mathcal{V}_0$，であるから，(I)の要請が満たされていれば，$\forall|f\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に対し

$$\langle\Psi|(Q_{\text{B}}A|f\rangle)=(\langle\Psi|Q_{\text{B}})A|f\rangle=0 \tag{5}$$

が成り立つ。この式が全く任意の状態 $|\Psi\rangle$ に対して成立することから

$$Q_{\text{B}}A|f\rangle=0 \tag{6}$$

が従い，$A|f\rangle\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$，すなわち(II)が満たされることがいえた。

一般に演算子 A が，時空のある有限領域上の Heisenberg 場の演算子で書かれているとき，A は局所的演算子(local operator)と呼ばれる。エネルギー・運動量 P_μ やカラー電荷 Q^a などの保存電荷演算子は，空間の無限領域の積分で与えられるので，すべて局所的でない。もし観測可能量 A が局所的演算子であるなら，A はさらに

(III)
$$[Q_{\text{B}}, A\}=0 \tag{7}$$

を満たすことがいえる。真空 $|0\rangle$ は物理的状態であるから，(II)から

$$Q_{\text{B}}A|0\rangle=0,\quad \text{それゆえ},\quad [Q_{\text{B}}, A\}|0\rangle=0 \tag{8}$$

が従う。ところが一般に局所的な演算子 $\mathcal{O}$ に対し

$$\mathcal{O}|0\rangle=0\quad \text{ならば}\quad \mathcal{O}=0 \tag{9}$$

という定理(Reeh-Schlieder の定理)が存在し，A が局所的なら $[Q_{\text{B}}, A\}$ も局所的であるから，(8)より(7)がいえるのである。この(9)の定理の証明には公理論的場の理論の知識が必要なので，ここでは省略する。(III)の条件が成立すれば明らかに(II)が成立するから，局所的でない演算子に対しては(III)の要請が最も強く，局所的演算子に対しては(I)～(III)は等価な要請となる。

観測可能量のカラー電荷 (III)は，「局所的観測可能量＝BRS 1重項演算子」だといっているわけであるが，興味あることに，そのような局所的観測可能量は本質的にカラー1重項(color singlet)演算子でなければならないことも示せる。

その前に定義を二つ：i）$[Q_{\mathrm{B}}, {}^{\exists}M\}$ の形をした演算子は，$Q_{\mathrm{B}}^2=0$ より明らかに BRS 不変だから，観測可能量であるが，物理的空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ 上では 0，${}^{\forall}|f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に対し $\langle f|[Q_{\mathrm{B}}, M\}|g\rangle=0$，であるので，自明な観測可能量，または簡単に，零演算子 (null operator) と呼ぶ。ii）**5-5** (57) で議論した大局的ゲージ変換の生成子＝カラー電荷 Q^a は，カラー対称性が自発的に破れていない限り well-defined な演算子で，正確には

$$Q^a=\int d^3x[J_\mu^a(x)-\omega\partial^\nu F_{\mu\nu}^a(x)]_{\mu=0} \tag{10}$$

で定義される。後の **6-6** で詳しく議論するが，ω は $J_\mu^a(x)$ 中の零質量 1 粒子 (pole) の寄与がちょうど $\partial^\nu F_{\mu\nu}^a(x)$ のそれで相殺されるように選んだ定数である。[付け加わっている項 $-\omega\partial^\nu F_{\mu\nu}^a$ は，**1-3** で触れた，Noether の定理で決まらないカレント不定項 $\partial^\nu f_{[\mu\nu]}$ の形をしていることに注意せよ。] (10) のカラー電荷 Q^a は，BRS 不変，

$$[Q_{\mathrm{B}}, Q^a]=-i(1-g\omega)\int d^3x\ \partial^k[F_{0k}(x)\times c(x)]^a=0 \tag{11}$$

であるから (演習問題 5.12)，それ自身カラー群の随伴表現，$[Q^a, Q^b]=if_{abc}Q^c$，に属する**非**局所的観測可能量である。カラー回転 (大局的ゲージ変換) で不変な，$[Q^a, \mathcal{O}]=0$，演算子 $\mathcal{O}$ をカラー 1 重項演算子と呼ぶ。

Q_{B} と Q^a の可換性 (11) により，局所的観測可能量 A は，一般性を失わず，カラー対称性の既約表現に属すると仮定できる。また，Q_{B} は FP ゴースト数 $N_{\mathrm{FP}}=iQ_c$ の確定した演算子なので，A はさらに決まった FP ゴースト数を持つとしてよい。以下，局所的観測可能量といえばこの性質を持つとしておく。

[命題] 局所的観測可能量 A は，零演算子でないならば，カラー 1 重項演算子である。

(証明) 対偶，すなわち，「A がカラー 1 重項でないならば零演算子である」を証明しよう。まず，(11) の可換性から，A の属するカラー電荷 Q^a の既約表現 $R=\{A_i\}$

$$[Q^a, A_i]=T_{ij}^a A_j \tag{12}$$

のメンバー演算子 A_i はすべて局所的観測可能量である；$[Q_{\mathrm{B}}, A_i\}=0$. 他方，ここで，**5-5** (58) の "Maxwell" 方程式

$$gJ_\mu^a=\partial^\nu F_{\mu\nu}^a+\{Q_{\mathrm{B}}, D_\nu\bar{c}^a\} \tag{13}$$

を思い起こす。カラー電荷の定義 (10) を考慮して，この (13) 両辺か

ら $g\omega\partial^\nu F^a_{\mu\nu}$ を引いたものを使えば,

$$
\begin{aligned}
g[Q^a, A_i]& \\
&=\int d^3x\,(1-g\omega)\partial^k_x[F^a_{0k}(x), A_i]+\int d^3x\Big[\{Q_\mathrm{B}, D_0\bar{c}^a(x)\}, A_i\Big] \\
&=\Big[Q_\mathrm{B}, \int d^3x\,[D_0\bar{c}^a(x), A_i\}\Big\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

を得る。ここで, 右辺第1行目第1項の全微分項は A_i が局所的であることから表面積分が0となること, 右辺第2行目へは Jacobi 恒等式を用いた。(14) の左辺に (12) を代入し, (14) の両辺に T^a_{ki} を掛け, 群の添字 a と表現の添字 i について和をとれば

$$gC_2(R)A_k=\Big[Q_\mathrm{B}, \sum_{a\in G}\int d^3x\,[D_0\bar{c}^a(x), T^a_{ki}A_i\}\Big\} \tag{15}$$

を得る。ただし, $C_2(R)$ は, ゲージ (カラー) 群 G の2次 Casimir (カシミア) 演算子の, A_i の属する既約表現 R での固有値

$$\sum_{a\in G}T^a_{ij}T^a_{jk}=C_2(R)\delta_{ik} \tag{16}$$

である。$C_2(R)$ は A の属する既約表現 R が1重項表現でない限り0ではないから, (15) はカラー1重項でない局所的観測可能量 A_k がすべて零演算子であることを示している†。(証明終)

もう一つ, 興味深いと思われるのは, 局所的観測可能量は本当に局所的である [すなわち月の裏側上の場の演算子と地球上の場の演算子の積をとって初めて観測可能量になるというようなものは (零演算子以外には) ない] ことを主張する次の命題であろう。

[命題] 互いに空間的 (space-like) に離れた二つの有限時空領域 D_1 と D_2 上のそれぞれの Heisenberg 場で書かれた局所的演算子を $\{\mathcal{O}_1{}^i\}$, $\{\mathcal{O}_2{}^i\}$ と呼ぶ。もし $A=\sum_i\mathcal{O}_1{}^i\mathcal{O}_2{}^i$ の形の局所的演算子が観測可能量であるならば, A は, 零演算子部分を除いて, D_1 領域だけですでに観測可能量となっている演算子と, D_2 領域だけでそうなっている演算子とから成っている。

(証明) BRS 変換を $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}$ で表すと, $A=\sum_i\mathcal{O}_1{}^i\mathcal{O}_2{}^i$ が観測可能量であること, $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}A=0$, から

$$\sum_i(\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\mathcal{O}_1{}^i)\mathcal{O}_2{}^i=-\sum_i(-)^{|i|}\mathcal{O}_1{}^i(\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\mathcal{O}_2{}^i) \tag{17}$$

---

† ここの証明では, 結合定数 g が一つの場合, すなわちゲージ群 G が単純群の場合を想定したが, 単純群でない場合も本質的に同じである。

が成り立つ。$(-)^{|i|}$ は $\mathcal{O}_1{}^i$ の統計に関する符号因子である。BRS 変換は時空の各点の Heisenberg 場をその点での Heisenberg 場に変える局所的変換であることを考慮して，この (17) を，D_1 上の演算子は単なる係数とみなして D_2 上の演算子の間の関係式として眺める。そうすれば，(17) は，左辺の $(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_1{}^i)$ を係数とする演算子 $\mathcal{O}_2{}^i$ の線形結合が，右辺の零演算子 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_2{}^i=[Q_{\rm B}, \mathcal{O}_2{}^i\}$ の線形結合で与えられることを示している。すなわち，(17) 左辺が，D_2 上の演算子として零演算子であることを意味し，よって，D_2 上のある演算子 M_2^i があって

$$\sum_i(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_1{}^i)\mathcal{O}_2{}^i=\sum_i(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_1{}^i)(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}M_2^i) \tag{18}$$

と書けるということである。そこで，演算子 A を

$$A=\bar{A}+\sum_i(-)^{|i|}\boldsymbol{\delta}_{\rm B}(\mathcal{O}_1{}^iM_2^i) \tag{19}$$

$$\bar{A}\equiv\sum_i\mathcal{O}_1{}^i\mathcal{O}_2{}^i-\sum_i(-)^{|i|}\boldsymbol{\delta}_{\rm B}(\mathcal{O}_1{}^iM_2^i) \tag{20}$$

と書き直す。(19) の右辺第 2 項は，本当の (全領域上の) 零演算子である。A からそれを引いた残りの部分 $\bar{A}$, (20), は実際に命題のいうように D_1 上の観測可能量と D_2 上の観測可能量とだけで書かれている。これを示すために，BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}$ を，形式的に，D_1 上の演算子のみを変換する部分 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^1$ と D_2 上の演算子のみを変換する部分 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^2$ の二つの部分に分け，$\boldsymbol{\delta}_{\rm B}=\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^1+\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^2$ と書く。そうすると望みの命題の証明は，(20) の演算子 $\bar{A}$ が $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^1$ でも $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^2$ でも共に不変であるといえば充分である。これは実際，(20), (18), (17) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^1\bar{A}&=\sum_i(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_1{}^i)\mathcal{O}_2{}^i-\sum_i(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_1{}^i)(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}M_2^i)=0,\\ \boldsymbol{\delta}_{\rm B}^2\bar{A}&=\sum_i(-)^{|i|}\mathcal{O}_1{}^i(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_2{}^i)+\sum_i(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\mathcal{O}_1{}^i)(\boldsymbol{\delta}_{\rm B}M_2^i)=0,\end{aligned} \tag{21}$$

となり成立する。ただし，$\{\boldsymbol{\delta}_{\rm B}^i, \boldsymbol{\delta}_{\rm B}^j\}=0\ (i, j=1, 2)$ を用いた。(証明終)

局所ゲージ不変量　以上の命題から，結局，局所的観測可能量は，自明なもの＝零演算子 を除けば，時空の各点で BRS 1 重項かつカラー 1 重項の演算子から構成されていることがわかった。この分析をさらに詳しく進めれば，局所的観測可能量は本質的には (有限個の例外を除いて) ゲージ場と物質場のみで書かれる局所ゲージ不変量で尽くされることがわかる。ここでは，証明抜きで結果のみを定理の形で述べる。

[定理]　Heisenberg 場の多項式で与えられる局所的観測可能量＝BRS 不変な局所演算子 A は次の形を持つ。

i ）A の持つ FP ゴースト数 $N_{\rm FP}$ が負ならば，A は零演算子である：

$$A=[Q_{\mathrm{B}},\ ^{\exists}M\} \tag{22}$$

ii）A の FP ゴースト数が 0 ならば,

$$A=F_{ゲージ不変}(A_\mu^a,\varphi_i)+[Q_{\mathrm{B}},\ ^{\exists}M\}. \tag{23}$$

ここで, $F_{ゲージ不変}$ は, ゲージ場 A_μ^a と物質場 φ_i のみから成る局所ゲージ不変な多項式である。

iii）A の FP ゴースト数が正ならば,

$$A=P[I_i(c);F_{ゲージ不変}(A_\mu^a,\varphi_i)]+[Q_{\mathrm{B}},\ ^{\exists}M\}. \tag{24}$$

ただし, P は局所ゲージ不変関数 $F_{ゲージ不変}$ を係数とする $I_i(c)$ の多項式である。$I_i(c)$ は同一時空点上の FP ゴースト場 c^a のみの (微分も含まない) カラー 1 重項多項式で, 各時空点毎に有限個しかない。

定理の最後にいう FP ゴースト場 c^a のカラー 1 重項多項式 $I_i(c)$ の形を, ゲージ群 G が簡単な場合を例にとって, 与えておこう。

1）G が 1 次元可換群 $U(1)$ のとき：

この場合は, ゴースト場 c に群の添字がなく, $I_i(c)$ は唯一つ

$$N_{\mathrm{FP}}=1;\quad c \tag{25}$$

しかない。

2）G が $\dim G=n$ の単純群のとき：

T^a を G の基本表現における生成子の表現行列とし,

$$C\equiv\sum_{a\in G}c^aT^a \tag{26}$$

の行列記法を用いる。この場合, $\mathrm{tr}\,C=\mathrm{tr}\,C^2=0$ であるので, $N_{\mathrm{FP}}=1,2$ を持つカラー 1 重項多項式 $I_i(c)$ は存在しない。 0 にならない最初の演算子 $I_i(c)$ は

$$N_{\mathrm{FP}}=3;\qquad \mathrm{tr}\,C^3\propto f_{abc}c^ac^bc^c. \tag{27}$$

$N_{\mathrm{FP}}=4$ の $I_i(c)$ は $\mathrm{tr}\,C^4=0$ で存在せず, 次の次数の演算子は

$$N_{\mathrm{FP}}=5;\qquad \mathrm{tr}\,C^5\propto d_{abc}(c\times c)^a(c\times c)^bc^c, \tag{28}$$

$[d_{abc}\equiv\mathrm{tr}(T_a\{T_b,T_c\})]$. 同様に続けて, 最後の最も次数の高い $I_i(c)$ は

$$N_{\mathrm{FP}}=n;\qquad \det_{(a,b)}[f_{abc}c^c]\propto\epsilon^{a_1a_2\cdots a_n}c^{a_1}c^{a_2}\cdots c^{a_n} \tag{29}$$

で与えられる。

この有限個のゴースト場多項式 $I_i(c)$ が, BRS 不変でありながら, 通常のゲージ不変量でも零演算子でもない, 局所的観測可能量の “例外” を与えるものである。

5-11　物理的 S 行列のゲージ固定非依存性

理論の BRS 不変性は，一方では，今まで見てきたように物理的 S 行列のユニタリー性を保証しており，同時に他方では，理論の物理的内容がゲージ固定条件の選び方によらないということを保証する。物理的内容とは，特に散乱理論の枠内では物理的 S 行列，それ以外では観測可能量の期待値，などである。これらがゲージ固定条件に依存しないことをこれから示そう。

Green 関数のゲージ固定依存性　まず，LSZ 公式で S 行列を計算するのに必要な Green 関数が，どのようにゲージ固定条件に依存しているのかを明らかにしよう。ゲージ場・物質場から FP ゴースト場まですべての Heisenberg 場をひっくるめて $\phi_i(x)$ と記すことにすれば，**4** 章の一般的な公式から，(任意の) Green 関数が

$$G^{(n)}(1,\cdots,n)=\langle 0|\mathrm{T}\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|0\rangle$$
$$=N\int\mathcal{D}\phi\ \phi_1\phi_2\cdots\phi_n\exp iS[\phi] \qquad (1)$$

で与えられる。場の添字 i で時空座標 x も表すと理解しておく。作用積分 $S[\phi]$ には，もちろんゲージ固定項及び対応する FP ゴースト項も含まれており，それらは，**5-4** (14) で与えた次の一般的な形を持つ：

$$\int d^4x\ \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}=\int d^4x[-i\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}(\bar{c}^aF^a)] \qquad (2)$$

F^a がゲージ固定関数で，**5-5** 以降の議論で採用したクラスの共変ゲージでは $F^a=\partial^\mu A^a_\mu+(1/2)\alpha B^a$ であった。今，ゲージ固定関数が F^a から $F^a+\varDelta F^a$ に無限小だけ変化したとすると，(1) の中の作用積分 $S[\phi]$ は

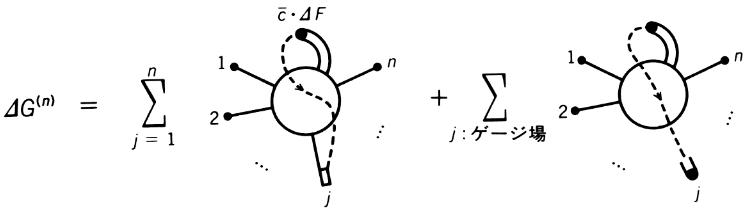
$$\varDelta S=\int d^4x[-i\boldsymbol{\delta}_\beta(\bar{c}^a\varDelta F^a)]=\int d^4x\{Q_{\mathrm{B}},\bar{c}^a\varDelta F^a\} \qquad (3)$$

だけ変化し，したがって，(1) の一般の Green 関数 $G^{(n)}$ は

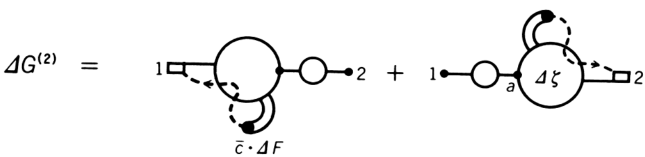
$$\varDelta G^{(n)}=\langle 0|\mathrm{T}\{Q_{\mathrm{B}},\bar{c}^a\varDelta F^a\}\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|0\rangle$$
$$=-i\sum_{j=1}^{n}(-)^{s_j}\langle 0|\mathrm{T}(\bar{c}^a\varDelta F^a)\phi_1\cdots\phi_{j-1}(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\phi_j)\phi_{j+1}\cdots\phi_n|0\rangle \qquad (4)$$

$\left(s_j\equiv\sum_{i=1}^{j-1}|i|\right)$ だけ変化することになる。ただし，(4) では $\bar{c}^a\varDelta F^a$ は積分量 $\int d^4x\ \bar{c}^a(x)\varDelta F^a(x)$ の略記である。(4) の右辺第 1 行から第 2 行への変形は WT 恒等式 **5-6** (1) を使ったことに相当する。(4) は，**5-7** で用いたよう

な Feynman グラフでは，5·18 図のように表される。ただし，第 2 項の図は ϕ_j がゲージ場 A_μ^a のときのみ現れるもので，$\delta_B A_\mu^a = \partial_\mu c^a + g(c \times A_\mu)^a$ の非斉次項 $\partial_\mu c^a$ の寄与を表す。



5·18 図



5·19 図

特に，2 点 Green 関数 $G^{(2)}$ の場合の (4) を図示すれば 5·19 図となる。この場合，BRS 変換を受けていない方の脚の 2 点関数をあらわに取り出して描いた。すなわち，例えば 5·19 図の 2 番目の図では，点 1 から点 a までが 2 点関数とみなせる部分で，(実際 2 点関数に効くすべてのグラフが表れるので) full な 2 点関数 $\langle 0|\mathrm{T}\phi_1\phi_a|0\rangle$ を与える。したがって a 点より先は (1 の方の足に関しては) 1 粒子既約なグラフである。a 点より先の $\bar{c}^a \Delta F^a$ 頂点を含んだ点 2 までの部分のグラフの寄与を運動量表示で $\Delta\zeta_j(p^2)$ と書くことにする。添字 j は今考えている 2 点関数の場の種類である。種類 j の場の 2 点関数 $G_j^{(2)}(p)$ は†，質量殻近傍で，くりこみ定数を Z_j として

$$G_j^{(2)}(p^2) \simeq Z_j / i(m_j^2 - p^2) \tag{5}$$

の形をとるから，ゲージ固定関数が $F^a + \Delta F^a$ の理論の 2 点 Green 関数 $G_j^{(2)} + \Delta G_j^{(2)}$ は，5·19 図を考慮して，質量殻近傍で

$$(G_j^{(2)} + \Delta G_j^{(2)})(p^2) \simeq \frac{(Z_j + 2Z_j \Delta\zeta_j)}{i(m_j^2 - p^2)} \tag{6}$$

† $G_j^{(2)}(p) \equiv \int d^4(x-y)\, e^{ip(x-y)}\, G_j^{(2)}(x-y)$.

で与えられる。ただし $\Delta\zeta_j \equiv \Delta\zeta_j(p^2=m_j^2)$ である。$Z_j \Delta\zeta_j$ の項が 2 倍されているのは，5·19 図の二つの図が同じ寄与を与えるからである。(6) は，$(Z_j^{1/2}+Z_j^{1/2}\Delta\zeta_j)^2 = Z_j + 2Z_j\Delta\zeta_j + O(\Delta\zeta_j^2)$ を考慮すれば，ゲージ固定関数が F^a から $F^a+\Delta F^a$ に変わったとき，Heisenberg 場のくりこみ，$\phi_j = Z_j^{1/2}\phi_j^{\rm ren}$，の因子が

$$Z_j^{1/2} \longrightarrow Z_j^{1/2}(1+\Delta\zeta_j) \qquad (7)$$

に変化したことを意味していることがわかる。

上では，$\Delta\zeta_j(p^2)$ の $p^2=m_j^2$ での値が存在すると仮定したが，実は発散する場合もある。例えば，物質場 φ_j の場合，$\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\varphi_j = igT_{jk}^a c^a \varphi_k$ は，普通，FP ゴースト数 $N_{\rm FP}=+1$ と，物質場 φ の運ぶ何らかの保存量子数とを同時に持つ複合 Heisenberg 場であるから，新たな結合状態が作られない限り $\Delta\zeta_j(p^2)$ は 1 粒子 pole を持たず問題ない。しかし，例えば対称性が自発的に破れたような場合には，物質場のある成分 φ_k は真空と同じ量子数しか持たないということがある。そのような場合は，複合場 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\varphi_j = igT_{jk}^a c^a\varphi_k$ が FP ゴースト 1 粒子状態とつながり，$\Delta\zeta_j(p^2)$ には 5·20 図のようなグラフが寄与することになる。そうすれば，$\Delta\zeta_j(p^2)$ は，FP ゴースト質量殻 $p^2=m_{\rm FP}^2$ 近傍で，

$$\Delta\zeta_j(p^2) \simeq i\Delta\tilde{\xi}\cdot i\tilde{Z}_3/(m_{\rm FP}^2-p^2)\cdot\tilde{\omega} \qquad (8)$$

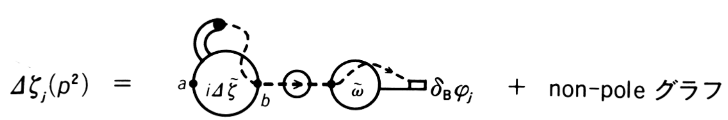
と振舞う。ただし，$i\Delta\tilde{\xi}$，$\tilde{\omega}$ は，5·20 図に示したそれぞれの部分のグラフの振幅 $i\Delta\tilde{\xi}(p^2)$, $\tilde{\omega}(p^2)$ の $p^2=m_{\rm FP}^2$ における値である。ここで一つ重要な点は，φ_j 粒子の質量 m_j は FP ゴーストのそれ $m_{\rm FP}$ と一致しなければならない，

$$m_j = m_{\rm FP} \qquad (9)$$

ということである。なぜなら，場 φ_j の BRS 変換式

$$[iQ_{\rm B}, \varphi_j(x)] = \boldsymbol{\delta}_{\rm B}\varphi_j(x) \qquad (10)$$

の，右辺の“複合”Heisenberg 場 $\boldsymbol{\delta}_{\rm B}\varphi_j(x)$ は，5·20 図の b 点より右側の部分のグラフ（：2 点関数 $\langle 0|{\rm T}\ \bar{c}\ \boldsymbol{\delta}_{\rm B}\varphi_j|0\rangle$ に相当）に FP ゴースト 1 粒子 pole を持つことから，$x_0 \to \pm\infty$ の極限でゴースト漸近場 $c^{\rm as}(x)$ になる，



5·20 図

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi_j(x) \xrightarrow[x_0\to\pm\infty]{} \tilde{Z}_3{}^{1/2}\tilde{\omega}\, c^{\mathrm{as}}(x), \tag{11}$$

ことがわかり，それゆえ，(10) の両辺が無矛盾であるためには，左辺の場 $\varphi_j(x)$ も，必ず，右辺の $c^{\mathrm{as}}(x)$ と同じ質量 m_{FP} の漸近場 $\varphi_j^{\mathrm{as}}(x)$ を持たねばならないからである。すなわち，(10) の両辺の $x_0\to\pm\infty$ 極限から，

$$[iQ_{\mathrm{B}}, Z_j{}^{1/2}\varphi_j^{\mathrm{as}}(x)] = \tilde{Z}_3{}^{1/2}\tilde{\omega}c^{\mathrm{as}}(x) \tag{12}$$

を得る。この式は $(\varphi_j^{\mathrm{as}}, c^{\mathrm{as}})$ が BRS 2 重項を成すことを示している。

このような場合には，ゲージ固定関数が $F^a+\varDelta F^a$ になった理論での φ_j 場の 2 点 Green 関数 $G_j^{(2)}+\varDelta G_j^{(2)}$ は，5·19 図の $\varDelta\zeta(p^2)$ 部分に (8) を代入し，質量殻 $p^2=m_j^2=m_{\mathrm{FP}}^2$ 近傍で，

$$(G_j^{(2)}+\varDelta G_j^{(2)})(p^2) \simeq \frac{Z_j}{i(m_j^2-p^2)}\left(1-\frac{2\tilde{Z}_3\tilde{\omega}\varDelta\tilde{\zeta}}{m_j^2-p^2}\right) \tag{13}$$

と振舞うことになる。ここで，無限小の補正項 $\varDelta G_j^{(2)}$ が 2 次の pole を作るということは，φ_j 粒子の 2 乗質量 m_j^2 が，ゲージ固定が変化したとき

$$m_j^2 \longrightarrow m_j^2+\varDelta m_j^2, \qquad \varDelta m_j^2 = 2\tilde{Z}_3\tilde{\omega}\varDelta\tilde{\zeta} \tag{14}$$

だけシフトすることを意味している。

このように，ゲージ固定条件を変化させたときに質量が変化するのは，BRS 4 重項粒子＝非物理的モード の場合のみだという点が重要である。対称性が自発的に破れた場合に相当する上の例では，確かに (12) に見たように，φ_j 粒子は“素”FP ゴースト粒子 c^{as} と BRS 2 重項を組んでいた。一般にも，ある粒子 φ_j の質量がゲージ固定の変化でずれるためには，$\varDelta G_j^{(2)}$ に 2 次の pole，したがって，5·19 図の中の $\varDelta\zeta_j(p^2)$ に pole，が現れなければならない。上の例では，この $\varDelta\zeta_j(p^2)$ の pole は 5·20 図の“素”FP ゴーストの pole で供給されたわけだが，一般には必ずしもそうでなく新たな結合状態による pole でもよい。しかし，とにかく，$\varDelta\zeta_j(p^2)$ に pole が出るということは，複合 Heisenberg 場 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi_j$ に 1 粒子 pole＝漸近場 が現れることを意味しており，そのことは上述の議論と同じく，BRS 変換式 (10) の整合性から，φ_j 粒子と $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}\varphi_j$ チャネルの結合状態粒子とが BRS 2 重項粒子になるということを意味しているのである。したがって我々は次の重要な結論に到達した。**BRS 1 重項粒子の質量は，ゲージ固定条件を変えても変化しない。**

実は，5·19 図では，場がゲージ場 A_μ^a の場合の $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{B}}A_\mu^a$ の非斉次項 $\partial_\mu c^a$ のグラフを省略したのだが，非斉次項も斉次項 $g(A_\mu\times c)^a$ も共に，5·20 図の

形の FP ゴースト 1 粒子 pole のグラフを持つ。しかし，それらは，2 点関数 $\langle 0|\mathrm{T}\, A_\mu^a A_\nu^b|0\rangle$ の $p_\mu p_\nu$ 比例項のみに寄与するため，物理的モード部分に関しては，質量は変化せず，くりこみ定数が (7) で示されるだけずれるという上の議論はゲージ場の場合にも正しい。

物理的 S 行列のゲージ固定非依存性　くりこまれた Heisenberg 場の Green 関数から S 行列を得るには，**3-3** の LSZ 公式で与えたように，Green 関数の各脚 j に（運動量表示で）"Klein-Gordon" 演算子 $iK_j(p_j)$ $[i(m_j^2-p_j^2)$ または $i(m_j-\not{p}_j)]$ を掛け，運動量を質量殻 $p_j^2=m_j^2$ 上に置き，さらに適当な偏極波動関数 $\varepsilon_j(\boldsymbol{p}_j)$ $[\varepsilon_\mu^{(\sigma)}(\boldsymbol{p})$ や $u(\boldsymbol{p},s)$ など$]$ を掛けて得られる。今のようにくりこまれていない Heisenberg 場を用いた Green 関数の場合は，さらにくりこみ因子 $Z_j^{1/2}$ で割る必要がある。すなわち，S 行列要素は

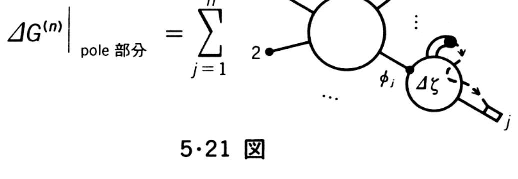
$$S^{(n)}=\prod_{j=1}^{n}[Z_j^{-1/2}\varepsilon_j(\boldsymbol{p}_j)\,iK_j(p_j)]G^{(n)}\Big|_{p_j^2=m_j^2} \tag{15}$$

の操作で与えられる。これからは外線がすべて BRS 1 重項粒子の物理的 S 行列要素のみを考える。

ゲージ固定関数を F^a から $F^a+\varDelta F^a$ に無限小変化させたとき，(15) の S 行列要素の変化する源は，$G^{(n)}$ の変化と $Z_j^{1/2}$ の変化の二つがある：

$$\varDelta S^{(n)}=\prod_{j=1}^{n}[Z_j^{-1/2}\varepsilon_j(\boldsymbol{p}_j)iK_j(p_j)]\varDelta G^{(n)}\Big|_{p_j^2=m_j^2}-[\sum_{j=1}^{n}Z_j^{-1/2}\varDelta(Z_j^{1/2})]S^{(n)}. \tag{16}$$

右辺第 1 項の $\varDelta G^{(n)}$ には，5・18 図のグラフが効いているのだが，この式においては，各 j の脚には，もとの φ_j 粒子と全く同じ質量のところ $p_j^2=m_j^2$ に 1 粒子 pole を持つグラフだけが効き得る。しかし，(4) の $\varDelta G^{(n)}$ の BRS 変換を受けた脚 $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\phi_j$ は，FP ゴースト場と ϕ との複合場であるから，一般に (4) 中の $\bar{c}^a\varDelta F^a$ 頂点とくっついた後，もとの粒子 ϕ_j に戻るという 5・21 図に示したタイプのグラフだけが $p_j^2=m_j^2$ に pole を作り得る。結合状態ができれば $\boldsymbol{\delta}_\mathrm{B}\phi_j$ には ϕ_j に戻らないグラフで pole が現れ得るが，その場合



5・21 図

は，上述のように，$(\phi_j^{\text{as}}, (\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}\phi_j)^{\text{as}})$ が BRS 2 重項粒子となるので，今の物理的 S 行列の議論からは除外される。同様に，ゲージ場の場合の $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}} A_\mu^a$ のチャネルで，FP ゴースト 1 粒子 pole が効く部分は p_μ に比例するので，(16) では物理的モードを取り出す偏極ベクトル $\varepsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{p})$ が掛かっていて，$p_\mu \varepsilon^{(\sigma)\mu}(\boldsymbol{p})=0$ により落ちる。

結局 5·21 図のグラフのみが効くことがわかったが，このグラフの $\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}\phi_j$ が $\bar{c}^a\Delta F^a$ と結合する部分のグラフは，ϕ_j 粒子の 2 点関数の場合の 5·19 図の $\Delta\zeta_j$ の部分と同じであるから，図より明らかに

$$\Delta G^{(n)}|_{\text{pole 部分}}=\left(\sum_{j=1}^{n}\Delta\zeta_j\right)G^{(n)} \tag{17}$$

を得る。したがって，これを (16) に代入すれば

$$\Delta S^{(n)}=\left[\sum_{j=1}^{n}(\Delta\zeta_j - Z_j^{-1/2}\Delta(Z_j^{1/2}))\right]S^{(n)} \tag{18}$$

となる。ところが (7) により場のくりこみ定数 $Z_j^{1/2}$ の変化分 $\Delta(Z_j^{1/2})$ は，ちょうど $Z_j^{1/2}\Delta\zeta_j$ で与えられているから，$\Delta S^{(n)}=0$，すなわち物理的 S 行列はゲージ固定条件のとり方によらないことが証明された。

観測可能量の期待値　前節で定義した観測可能量 A の，物理的状態での期待値がゲージ固定条件によらないことも同様に示すことができる。まず，物理的状態として，BRS 1 重項モードのみで構成した任意の in 状態 $|\alpha\ \text{in}\rangle$ と out 状態 $|\beta\ \text{out}\rangle$ をとった場合の期待値

$$S_A^{(n)}\equiv\langle\beta\ \text{out}|A|\alpha\ \text{in}\rangle \tag{19}$$

を考えよう。A は時間に関しては有限領域内の演算子としておく。そうすれば，この量は単に“A 演算子が挿入された” S 行列要素であるから，上の (15) の公式で，$G^{(n)}$ の代わりに A-挿入 Green 関数

$$G_A^{(n)}\equiv\langle 0|\mathrm{T}\,A\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|0\rangle \tag{20}$$

を用いれば評価できる。符号の煩わしさを避けるべく A は Bose 演算子とする†。n はもちろん α と β に入っている粒子数の和である。この A-挿入 Green 関数の，ゲージが変化したときの変化は

$$\begin{aligned}\Delta G_A^{(n)}&=\langle 0|\mathrm{T}\{Q_{\text{B}}, \bar{c}^a\Delta F^a\}A\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|0\rangle\\&=\langle 0|\mathrm{T}(\bar{c}^a\Delta F^a)[Q_{\text{B}}, A]\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|0\rangle\\&\quad -i\sum_{j=1}^{n}(-)^{s_j}\langle 0|\mathrm{T}(\bar{c}^a\Delta F^a)A\phi_1\cdots\phi_{j-1}(\boldsymbol{\delta}_{\text{B}}\phi_j)\phi_{j+1}\cdots\phi_n|0\rangle\end{aligned} \tag{21}$$

となる。(19) の $S_A^{(n)}$ の，ゲージが変化したときの変化 $\Delta S_A^{(n)}$ は，(16) の公

† もし Fermi 演算子なら，Grassmann 数を掛けて Bose 量化しておけばよい。

式で $\varDelta G^{(n)}, S^{(n)}$ を単に $\varDelta G_A^{(n)}, S_A^{(n)}$ と読み直せばよい。その (16) では，(21) の $\varDelta G_A^{(n)}$ のうち，場 ϕ_j が BRS 変換を受けた最後の n 項の寄与は，上の物理的 S 行列要素の場合と同様，場のくりこみ定数の変化分と相殺する。それゆえ，(16) の右辺は，$\varDelta G_A^{(n)}$ に (21) 右辺第 2 式第 1 項，A が BRS 変換を受けた項，を代入したものだけが残り，

$$\begin{aligned}\varDelta S_A^{(n)} &= \langle\beta\ \mathrm{out}|\mathrm{T}\,(\bar{c}^a\varDelta F^a)[Q_\mathrm{B}, A]\,|\alpha\ \mathrm{in}\rangle \\ &= \langle\beta\ \mathrm{out}|\mathrm{T}\,\{Q_\mathrm{B}, \bar{c}^a\varDelta F^a\}A\,|\alpha\ \mathrm{in}\rangle \end{aligned} \tag{22}$$

を得る。第 2 行へは $Q_\mathrm{B}|\alpha\ \mathrm{in}\rangle = Q_\mathrm{B}|\beta\ \mathrm{out}\rangle = 0$ を用いた。この最後の量は，(21) 第 1 等号の右辺の量に，あたかも直接 “LSZ 操作” を行ったもの

$$\prod_{j=1}^{n}[Z_j^{-1/2}\varepsilon_j(\boldsymbol{p}_j)iK_j(p_j)]\langle 0|\mathrm{T}\{Q_\mathrm{B}, \bar{c}^a\varDelta F^a\}A\phi_1\phi_2\cdots\phi_n|0\rangle,$$

に見えるが，もちろん，等しくないことに注意しておこう。等号が成立しないのは，挿入されている演算子 $\bar{c}^a\varDelta F^a = \int d^4x\ \bar{c}^a(x)\varDelta F^a(x)$ が $x_0 = \pm\infty$ にまで伸びており，Green 関数の 1 粒子 pole 構造を変えるからである。

A が局所的観測可能量なら，BRS 不変 $[Q_\mathrm{B}, A] = 0$ であるから，(22) の右辺第 1 式ですでに $\varDelta S_A^{(n)}$ は 0 である。局所的でない観測可能量の場合でも，**5-10** (3)，すなわち $Q_\mathrm{B}A|\alpha\ \mathrm{in}\rangle = Q_\mathrm{B}A|\beta\ \mathrm{out}\rangle = 0$，が成り立つので，(22) の第 2 式より $\varDelta S_A^{(n)} = 0$ が従い，よって，(19) の形の期待値がゲージ固定条件によらないことが一般的にいえた。(19) の α, β は BRS 1 重項モードで作った状態としたが，一般の $\mathcal{V}_\mathrm{phys}$ の状態でもよい。それは，それぞれのゲージ内で，観測可能量の期待値は零ノルムベクトル分だけ状態を変えても不変だからである。また，(19) の $S_A^{(n)}$ は $\langle\beta\ \mathrm{in}|SA|\alpha\ \mathrm{in}\rangle$ と書け，かつ，物理的 S 行列要素がゲージ固定によらないから，物理的 in 状態どうしでの期待値 $\langle\beta\ \mathrm{in}|A|\alpha\ \mathrm{in}\rangle$ もゲージ固定条件によらないことが従う。

演習問題 5.

5.1 恒等式 5-2 (39) が，まず 5-2 (11) で定義した Poisson 括弧 $\{F, G\}_\mathrm{P}$ に対して，次に 5-2 (26) で定義した Dirac 括弧 $\{F, G\}_\mathrm{D}$ に対して，それぞれ成り立つことを証明せよ。

5.2 Dirac 場の作用積分で，一部部分積分したもの

$$S=\int d^4x[(1-\alpha)\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\alpha(\partial_\mu\bar{\psi})i\gamma^\mu\psi-m\bar{\psi}\psi], \qquad (\alpha\text{：任意実パラメータ})$$

を出発点の作用積分とし，ψ, ψ^* を共に独立な座標変数と考えて，5-2 で述べた特異系の量子化の手続きを遂行せよ。このとき，Dirac 括弧を通じて得られる ψ, ψ^* の反交換関係は，単に，$\alpha=0$ の作用積分で，ψ を座標変数，$i\psi^*$ を（座標変数と思わず）ψ に共役な運動量変数とみなす，2-2 で行った "簡便量子化法" の結果と一致することを確めよ。

5.3 経路積分測度 $\mathcal{D}A\equiv\prod_{a,\mu,x}dA_\mu^a(x), \mathcal{D}\varphi_i=\prod_{i,x}d\varphi_i(x)$ が，ゲージ変換 $A_\mu^a\to A_\mu'^a=A_\mu^a+D_\mu\theta^a$，$\varphi_i\to\varphi_i'=\varphi_i+ig\theta^a(T^a\varphi)_i$ の下で不変であること，5-3 (41)，を証明せよ。

5.4 ゲージ場とゴーストの BRS 変換則 5-4 (5), (8) を用いて，$\boldsymbol{\delta}_B(\boldsymbol{\delta}_B A_\mu)=0$ が成立していることを確めよ。また，$\boldsymbol{\delta}_B(\boldsymbol{\delta}_B c^a)=0$ を，行列記法を用いずに，直接，成分変換則 5-4 (9) を用いて確かめてみよ。

5.5 フェルミオン場 ψ に対し，$[N,\psi]=\psi$, $[N,\psi^\dagger]=-\psi^\dagger$ を満たす演算子 N を，ψ の個数演算子と呼ぶ。今，2 種のフェルミオン場 $\psi_i(i=1,2)$ が同時刻正準反交換関係

$$\{\psi_i(\boldsymbol{x}),\psi_j^\dagger(\boldsymbol{y})\}=\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

$$\{\psi_i(\boldsymbol{x}),\psi_j(\boldsymbol{y})\}=\{\psi_i^\dagger(\boldsymbol{x}),\psi_j^\dagger(\boldsymbol{y})\}=0$$

を満たしているとき，N_1 を ψ_1 の個数演算子として，次の Klein 変換

$$\Psi_1(\boldsymbol{x})\equiv\psi_1(\boldsymbol{x}), \qquad \Psi_2(\boldsymbol{x})\equiv e^{i\pi N_1}\psi_2(\boldsymbol{x})$$

で定義される新しい場 $\Psi_i(i=1,2)$ は，Ψ_1 自身または Ψ_2 自身のそれぞれの正準反交換関係はもとと同じであるが，Ψ_1 と Ψ_2 の間はもとの反可換則ではなく可換則になること，を示せ。

5.6 Noether の手続きで，BRS 電荷 Q_B, FP ゴースト電荷 Q_c, カラー電荷 Q^a の表式を求め，5-5 (26), (30), (56) と一致することを確めよ。また正準交換関係を用いて，それらがそれぞれの変換の生成子となっていること，5-5 (27), (31), (57)，を確認せよ。

5.7 一般に運動方程式の情報は，経路積分法では，全微分量の積分は 0 であるという恒等式で表現される：

$$\int\mathcal{D}\phi\,\frac{\delta}{\delta\phi_i(x)}(e^{iS[\phi,J]})=0=\int\mathcal{D}\phi\,\frac{\delta S[\phi,J]}{\delta\phi_i(x)}e^{iS[\phi,J]}.$$

NL 場 B^a や反ゴースト場 $\bar{c}^a$ の Heisenberg 運動方程式から導いた恒等式 5-6 (12), (13) を，経路積分法で導け。

5.8 5-6 (46) で定義したベクトル場の偏極平面波 $f_{\boldsymbol{k},\mu}^{(\sigma)}(x)$ が，次の直交性

$$(f_{\boldsymbol{k}}^{(\sigma)},f_{\boldsymbol{q}}^{(\tau)})\equiv i\int d^3x\,f_{\boldsymbol{k},\mu}^{(\sigma)*}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\boldsymbol{q}}^{(\tau)\mu}(x)=-\tilde{\eta}^{\sigma\tau}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})$$

を満たすことを確かめた上，モード展開 5-6 (46) の逆変換が，5-7 (4)，すなわち，この内積記号を用いて

$$a(\boldsymbol{k},\sigma)=-\tilde{\eta}^{\sigma\tau}(f_{\boldsymbol{k}}^{(\tau)},A^{\rm as}), \qquad a^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)=-\tilde{\eta}^{\sigma\tau}(A^{\rm as},f_{\boldsymbol{k}}^{(\sigma)})$$

となることを示せ。$a^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)$ に対するこの表式及び $A_\mu^{\mathrm{as}}(x)$ に対する Lorentz 変換則 1-3 (30) を用いて，$a^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma=\pm)|0\rangle$ がヘリシティ ±1 状態であること，

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma=\pm)|0\rangle=\pm 1\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma=\pm)|0\rangle$$

を示せ。

5.9 共変ゲージにおけるゲージ理論では，Heisenberg 場 A_μ^a が (規格化された) 零質量ベクトル漸近場 $A_\mu^{a,\mathrm{as}}$ を，$\lim_{x_0\to\pm\infty} A_\mu^a(x)=Z_3^{1/2}A_\mu^{a,\mathrm{as}}(x)+\cdots$ の形で含むならば，Heisenberg 場 $f_{\mu\nu}^a\equiv\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a$ の発散 $\partial^\nu f_{\mu\nu}^a$ は，NL 場 $B^a(x)$ の零質量 (素 4 重項メンバー) 漸近場 $\beta^a(x)$ (5-9 (27)) を

$$\lim_{x_0\to\pm\infty}\partial^\nu f_{\mu\nu}^a(x)=-Z_3\partial_\mu\beta^a(x)+\cdots,$$

の形で含むことを示せ。($\beta^a(x)$ は 5-6 (63) の $Z_3^{-1/2}B^{a,\mathrm{as}}(x)$ に等しい。)

5.10 5-7 の表 1 の Feynman グラフ則を 5-7 (1) の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ から読み取り，確かめよ。同様に表 2 のルールも確認せよ。

5.11 5-9 で証明した関係式 $P^{(n)}=\{Q_\mathrm{B},R^{(n)}\}$ $(n\geqq 1)$，及び BRS 1 重項モードのみで張られた部分空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}\equiv P^{(0)}\mathcal{V}$ の正定値性を用いて次のことを示せ：

1） BRS 不変な Heisenberg 場 $\phi(x)$ (簡単のためスカラーとする) の 2 点 Green 関数 $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ の中間状態には，BRS 1 重項粒子のみから成る状態 $|\alpha\rangle\in\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ しか効かないこと。さらに，3-1 で行ったスペクトル表示を求め，スペクトル関数がこの場合でも正定値 $\rho(\sigma^2)\geqq 0$ であることを証明せよ。

2） 有限温度系のゲージ理論 (共変ゲージ) の分配関数 Z_β は，ゲージ場の縦波や FP ゴーストなどの非物理的モードが効かないように，$Z_\beta\equiv\mathrm{tr}(P^{(0)}e^{-\beta H})$ と定義しなければならない。この $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ への射影演算子 $P^{(0)}$ は，Heisenberg 場で書かれた表式が知られていないが，幸い，

$$Z_\beta=\mathrm{tr}(P^{(0)}e^{-\beta H})=\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-\beta H})\qquad(N_{\mathrm{FP}}\equiv iQ_c)$$

の等式が成り立つ。これを証明せよ。また，ここで，Klein 変換類似の因子 $e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}=e^{-\pi Q_c}$ の存在は，Fermi 統計に従う FP ゴースト場の (虚時間) 温度 Green 関数を，(虚時間方向に周期 β の) **周期的**関数に変える，という効果のみを持つことを示せ。[詳細は H.Hata and T.Kugo, Phys. Rev. D21 (1980) 3333 を見よ。]

5.12 場の強さ $F_{\mu\nu}^a$ の BRS 変換が $[iQ_\mathrm{B},F_{\mu\nu}^a(x)]=gf^{abc}F_{\mu\nu}^b(x)c^c(x)$ となることを確かめ，"Maxwell" 方程式を利用して，5-10 (11) を示せ。

付　　録

A.　4次元記法, Diracスピノール

A-1　4次元記法

4次元テンソルの添字はギリシャ文字 $\mu, \nu, \rho, \cdots$ で, 空間の3次元成分の添字はラテン文字 $i, j, k, \cdots$ で表す。

4元ベクトル　$x^\mu=(x^0, x^1, x^2, x^3)=(x^0, x^i)=(t, \boldsymbol{x})$　(1)

計量　$g_{\mu\nu}$：　$g_{00}=+1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$, 他は0.　(2)

添字の上下は $g_{\mu\nu}$ や $g^{\mu\nu}=(g^{-1})^{\mu\nu}$ で行う。

内積　$a\cdot b\equiv ab\equiv a_\mu b^\mu=g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=a_0b_0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　(3)

微分　$\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu=(\partial/\partial t, \nabla)$,　　$\partial^\mu=\partial/\partial x_\mu$　(4)

運動量　$p^\mu=(E, \boldsymbol{p})=i\partial^\mu=(i\partial/\partial t, -i\nabla)$　(5)

完全反対称テンソル　$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$：$\epsilon^{0123}=+1$ の規約　(6)

($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ に注意。性質については付録B-5を見よ。)

A-2　4次元 γ 行列

γ 行列の種々な性質は付録Bに与える。

$$
\begin{aligned}
&\gamma^\mu：\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\\
&\quad\sigma^{\mu\nu}\equiv(i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\\
&\quad\gamma_5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\gamma_5^\dagger
\end{aligned}
\tag{7}
$$

スピノール ψ の Dirac 共役は $\bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma_0$. 4×4 行列 Γ の行列要素 $\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2$ の hermite 共役は

$$(\bar{\psi}_1\Gamma\psi_2)^\dagger=\bar{\psi}_2\bar{\Gamma}\psi_1, \qquad \bar{\Gamma}\equiv\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{8}$$

となる。種々な γ 行列の $\bar{\Gamma}$ は

$$\bar{\gamma}^{\mu}=\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0=\gamma^{\mu},$$
$$\bar{\sigma}^{\mu\nu}=\gamma^0\sigma^{\mu\nu\dagger}\gamma^0=\sigma^{\mu\nu},$$
$$\overline{i\gamma_5}=\gamma^0(i\gamma_5)^{\dagger}\gamma^0=i\gamma_5,$$
$$\overline{\gamma_5\gamma^{\mu}}=\gamma^0(\gamma_5\gamma^{\mu})^{\dagger}\gamma^0=\gamma_5\gamma^{\mu}. \tag{9}$$

荷電共役行列 C：

$$C^{-1}\gamma^{\mu}C=-\gamma^{\mu T},$$
$$C^{-1}\sigma^{\mu\nu}C=-\sigma^{\mu\nu T},$$
$$C^{-1}\gamma_5 C=\gamma_5{}^T,$$
$$C^{-1}\gamma_5\gamma^{\mu}C=(\gamma_5\gamma^{\mu})^T,$$
$$C^{\dagger}C=1,$$
$$C^T=-C. \tag{10}$$

以上は表示によらないが，以下に述べる二つの表示のどちらでも次式が成り立つ：

$$C=i\gamma^2\gamma^0=C^*,$$
$$C^2=-1. \tag{11}$$

Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$：

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

スピノール表示(またはカイラル表示)

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0&-\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix},\qquad \gamma_5=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$\sigma^{0i}=i\begin{pmatrix}\sigma^i&0\\0&-\sigma^i\end{pmatrix},\qquad \sigma^{ij}=\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k&0\\0&\sigma^k\end{pmatrix}. \tag{13}$$

標準表示(または Dirac 表示)

$$\gamma^{\mu}_{\text{標準}}=U\gamma^{\mu}_{\text{スピノール}}U^{\dagger},\qquad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\-\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix},\qquad \gamma_5=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$\sigma^{0i}=i\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\\sigma^i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma^{ij}=\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k&0\\0&\sigma^k\end{pmatrix}. \tag{15}$$

A-3 Dirac スピノール

正・負エネルギー平面波解

$$(\not{p}-m)u(\boldsymbol{p},s)=0,\qquad (\not{p}+m)v(\boldsymbol{p},s)=0,$$
$$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)(\not{p}-m)=0,\qquad \bar{v}(\boldsymbol{p},s)(\not{p}+m)=0. \tag{16}$$

u, v 間の関係として $v(\boldsymbol{p}, s)=C\bar{u}^T(\boldsymbol{p}, s)$ の規約をとる。

規格・直交性

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)\,u(\boldsymbol{p}, s')=2m\delta_{ss'}, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p}, s)\,v(\boldsymbol{p}, s')=-2m\delta_{ss'},\\
&\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s')=\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu v(\boldsymbol{p}, s')=2p^\mu\delta_{ss'},\\
&u^\dagger(\boldsymbol{p}, s)\,v(-\boldsymbol{p}, s')=v^\dagger(\boldsymbol{p}, s)\,u(-\boldsymbol{p}, s')=0.
\end{aligned} \tag{17}$$

完全性

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=\pm} u(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)=\not{p}+m,\\
&\sum_{s=\pm} v(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)=\not{p}-m.
\end{aligned} \tag{18}$$

スピン和をとらない場合は $s=\pm 1$ の意味に依存する：

i） ヘリシティ $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|\equiv\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ の固有状態のとき

$$\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)=(\not{p}+m)(1+s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\\
&v(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)=(\not{p}-m)(1-s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2\\
&\qquad\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,u(\boldsymbol{p}, s)=s\,u(\boldsymbol{p}, s)\\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\,v(\boldsymbol{p}, s)=-s\,v(\boldsymbol{p}, s)\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

ii） 共変4元スピン(Pauli-Lubanskiベクトル) $W^\mu=-(4m)^{-1}\times\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\nu\rho}p_\sigma$ のある方向 e^μ ($e^2=-1, e\cdot p=0$) 成分 $-e\cdot W=(1/2m)\times\gamma_5\not{e}\not{p}$ の固有状態のとき

$$\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)=(\not{p}+m)(1+s\gamma_5\not{e})/2\\
&v(\boldsymbol{p}, s)\,\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)=(\not{p}-m)(1+s\gamma_5\not{e})/2\\
&\qquad\begin{pmatrix}\gamma_5\not{e}\;u(\boldsymbol{p}, s)=s\,u(\boldsymbol{p}, s)\\ -\gamma_5\not{e}\;v(\boldsymbol{p}, s)=-s\,v(\boldsymbol{p}, s)\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{20}$$

標準表示での解のあらわな形

$$u(\boldsymbol{p}, s)=\begin{pmatrix}\sqrt{E+m}\,\chi^{(s)}\\ \sqrt{E-m}\;\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\chi^{(s)}\end{pmatrix}, \qquad v(\boldsymbol{p}, s)=\begin{pmatrix}\sqrt{E-m}\;\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\chi^{(s)\prime}\\ \sqrt{E+m}\,\chi^{(s)\prime}\end{pmatrix} \tag{21}$$

ただし $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$, $\chi^{(s)\prime}=-i\sigma^2\chi^{(s)*}$ である。二成分波動関数 $\chi^{(s)}$ は，$s=\pm 1$ が z 方向スピンの2倍 σ_3 の固有状態を意味するときは

$$\chi^{(s=+1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \chi^{(s=-1)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{22}$$

ヘリシティ $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ の固有状態を意味するときは

$$\chi^{(s=+1)}=\begin{pmatrix}e^{-i\varphi/2}\cos\theta/2\\ e^{i\varphi/2}\sin\theta/2\end{pmatrix}, \qquad \chi^{(s=-1)}=\begin{pmatrix}-e^{-i\varphi/2}\sin\theta/2\\ e^{i\varphi/2}\cos\theta/2\end{pmatrix}, \tag{23}$$

で与えられる。(θ, φ は $\boldsymbol{p}$ の天頂角，方位角を表す。)

Gordon 恒等式：　$u(\boldsymbol{p}, s)=u(p)$ と記して

$$\bar{u}(p')\,\gamma^\mu u(p)=(2m)^{-1}\bar{u}(p')[(p'+p)^\mu+i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu]u(p),$$
$$\bar{u}(p')\,\gamma^\mu\gamma_5 u(p)=(2m)^{-1}\bar{u}(p')[(p'-p)^\mu\gamma_5+i\sigma^{\mu\nu}(p'+p)_\nu\gamma_5]u(p). \qquad (24)$$

B.　$n=2k$ 次元 Lorentz 群 $SO(1, n-1)$ の γ 行列

B-1　Clifford 代数（γ 行列のなす代数：2^n 次元）$\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ の生成元 $\gamma^\mu(\mu=0, 1, 2, \cdots, n-1)$：$2^k\times 2^k$ 行列　($n=2k$ 個)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+1, -1, -1, \cdots, -1) \qquad (1)$$

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \qquad \gamma_\mu\equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu \qquad (2)$$

$\mathcal{C}$ の基底の完全系 ($m=0, 1, \cdots, n$)

$$\gamma^{(m)}\equiv\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\equiv(m!)^{-1}\gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m]} \quad ：{}_n\mathrm{C}_m \text{ 個}$$
$$=\begin{cases}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_m} & \text{どの } \mu_i \text{ も相異なるとき}\\ 0 & \text{どれかの添字が一致するとき}\end{cases} \qquad (3)$$

（添字に付いた [　] は完全反対称化を表す。例えば，$\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}=\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho+\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu+\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho-\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu-\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu$.）

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\gamma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l})=(-)^{[m/2]}2^k\delta_{ml}\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m} \qquad (4)$$

ただし指数部の $[x]$ は x 以下の最大の整数であり†，多添字 δ は

$$\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\equiv\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\delta^{\mu_2}_{\nu_2}\cdots\delta^{\mu_m}_{\nu_m]} \qquad (5)$$

で定義され，その便利な性質は任意の m 階完全反対称テンソル $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$ に対して次式を満たすことである：

$$(m!)^{-1}\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}=T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}. \qquad (6)$$

B-2　荷電共役行列 C

$$C^{-1}\gamma^\mu C=\eta\,\gamma^{\mu T} \qquad (\eta=\pm 1\text{；どちらも可能}) \qquad (7)$$

$$C^\dagger C=1 \qquad (8)$$

$$C^T=\eta^k(-)^{[k/2]}C \qquad (9)$$

B-3　カイラル射影演算子 $P_\pm$

$$\Gamma_5\equiv i^{k-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^{n-1} \qquad (\text{4 次元の } \gamma_5 \text{ に似たもの}) \qquad (10)$$

$$(\Gamma_5)^2=1, \qquad C^{-1}\Gamma_5 C=(-)^k\Gamma_5^T \qquad (11)$$

$$P_\pm=(1\pm\Gamma_5)/2 \qquad (12)$$

---

†　$(-)^{[n/2]}=(-)^{n(n-1)/2}$ に注意.

B-4 Fierz (フィルツ) 変換

一般に $D\times D$ 行列の完全系 $\{\lambda^A\}$ があり

$$\mathrm{tr}(\lambda^A\lambda_B)=N\delta^A_B \qquad (N：規格化因子) \tag{13}$$

を満たせば，任意の $D\times D$ 行列 $\Gamma=(\Gamma_{ij})$ は

$$\Gamma=N^{-1}\sum_A \lambda^A\,\mathrm{tr}(\lambda_A\Gamma) \tag{14}$$

と展開される。それゆえ，任意の二つの $D\times D$ 行列 Λ^1, Λ^2 に対し，$\Lambda^1_{ij}\Lambda^2_{kl}\equiv\Gamma^{(jk)}_{il}$ を D^2 個の行列 $\Gamma^{(jk)}$ の i, l 要素とみなせば，(14) より

$$\Lambda^1_{ij}\Lambda^2_{kl}=N^{-1}\sum_A \lambda^A_{il}(\Lambda^2\lambda_A\Lambda^1)_{kj} \tag{15}$$

が従い，これが Fierz 変換の公式

$$(\bar{\psi}_1\Lambda^1\psi_2)(\bar{\psi}_3\Lambda^2\psi_4)=N^{-1}\sum_A(\bar{\psi}_1\lambda^A\psi_4)(\bar{\psi}_3\Lambda^2\lambda_A\Lambda^1\psi_2) \tag{16}$$

を与える。$\psi_{1\sim4}$ は D 次元ベクトルである。

今の場合，(3) の C の基底 $\{\gamma^{(m)}\}$ は $\sum_{m=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_m=2^n=2^k\times2^k$ 個あり，$2^k\times2^k$ 行列の完全系をなし，(4) の規格化を満たすから，(16) は

$$\begin{aligned}&(\bar{\psi}_1\Lambda^1\psi_2)(\bar{\psi}_3\Lambda^2\psi_4)\\&=\frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{n}(-)^{[m/2]}\frac{1}{m!}(\bar{\psi}_1\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\psi_4)(\bar{\psi}_3\Lambda^2\gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\Lambda^1\psi_2)\end{aligned} \tag{17}$$

となる。$\psi_{1\sim4}$ は 2^k 成分の $SO(1,n-1)$ スピノールである†。もし Λ^1, Λ^2 のテンソル添字が縮約されている場合には次の公式が有用である。

$$\begin{aligned}&(m!)^{-1}\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}=(-)^{[m/2]}d_{ml}\,\gamma^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\\&d_{ml}=(-)^{ml}\{\text{多項式}\ (1+x)^{n-l}(1-x)^l\ \text{の中の}\ x^m\ \text{の係数}\}.\end{aligned} \tag{18}$$

B-5 完全反対称テンソルと双対則

$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$：$n$ 次元完全反対称テンソル ($\epsilon^{012\cdots n-1}=+1$)

$^\forall m\ (0\leqq m\leqq n)$ に対して††

$$\frac{(-)^{n-1}}{(n-m)!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-m}}\epsilon_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-m}}=\delta^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m} \tag{19}$$

$$\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-m}}=\frac{(-)^{[m/2]+1}i^{k-1}}{m!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-m}\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\gamma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}\Gamma_5 \tag{20}$$

B-6 合成則，トレース公式，その他

$$\gamma_\mu\gamma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}\quad=\gamma_\mu{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}+\sum_i(-)^{i-1}\delta^{\alpha_i}_\mu\gamma^{\alpha_1\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_m}, \tag{21}$$

---

† もし $\psi_{1\sim4}$ のスピノールを Grassmann 数とするなら，(17) の右辺には負号がつく。
†† (19) の符号 $(-)^{n-1}$ は $(n-1)$ 個の空間添字を下げたところからくる。

$$\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}=\gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}+\sum_i(-)^i\delta^{\alpha_i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}{}^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\alpha_m}$$
$$+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\delta^{\alpha_i\alpha_j}_{\mu\nu}\gamma^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\breve{\alpha}_j\cdots\alpha_m}, \qquad (22)$$

$$\gamma_{\mu\nu\rho}\gamma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}=\gamma_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}+\sum_i(-)^{i-1}\delta^{\alpha_i}_{[\mu}\gamma_{\nu\rho]}{}^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\alpha_m}$$
$$+\sum_{i<j}(-)^{i+j}\delta^{\alpha_i\alpha_j}_{[\mu\nu}\gamma_{\rho]}{}^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\breve{\alpha}_j\cdots\alpha_m}$$
$$+\sum_{i<j<l}(-)^{i+j+l-1}\delta^{\alpha_i\alpha_j\alpha_l}_{\mu\nu\rho}\gamma^{\alpha_1\cdots\breve{\alpha}_i\cdots\breve{\alpha}_j\cdots\breve{\alpha}_l\cdots\alpha_m} \qquad (23)$$

等々。ただし $\breve{\alpha}_i$ は添字 α_i を除く意味であり，上下の添字の混ざった γ 行列は $\gamma_\mu{}^{\alpha\beta\cdots}\equiv g_{\mu\nu}\gamma^{\nu\alpha\beta\cdots}$ などを表す。また，すでに反対称な添字の二組 $(\mu_1\cdots\mu_m)$ と $(\nu_1\cdots\nu_l)$ の間の反対称化 $A_{[\mu_1\cdots\mu_m}B_{\nu_1\cdots\nu_l]}$ は $(m+l)!/m!\,l!$ 個の項の反対称和である。(21) を 2 度使えば，特に

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho=\gamma^{\mu\nu\rho}+g^{\mu\nu}\gamma^\rho-g^{\mu\rho}\gamma^\nu+g^{\nu\rho}\gamma^\mu. \qquad (24)$$

$\not{a}=a_\mu\gamma^\mu$ として

$$\mathrm{tr}(\not{a}\not{b})=a\cdot b\,\mathrm{tr}(1)=2^k a\cdot b \qquad (25)$$

$$\mathrm{tr}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4)=2^k[(a_1\cdot a_2)(a_3\cdot a_4)-(a_1\cdot a_3)(a_2\cdot a_4)+(a_1\cdot a_4)(a_2\cdot a_3)] \qquad (26)$$

$$\mathrm{tr}(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_{2m})=2^k\sum_{\sigma:\text{置換}}\mathrm{sgn}\,\sigma\,(a_{\sigma(1)}\cdot a_{\sigma(2)})\cdots(a_{\sigma(2m-1)}\cdot a_{\sigma(2m)}) \qquad (27)$$

$$\mathrm{tr}(\Gamma_5\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n)=2^k(-i)^{k-1}\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}a_1^{\mu_1}a_2^{\mu_2}\cdots a_n^{\mu_n} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma^\mu=n\\
&\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu=(2-n)\not{a}\\
&\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu=4a\cdot b+(n-4)\not{a}\not{b}\\
&\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu=-2\not{c}\not{b}\not{a}-(n-4)\not{a}\not{b}\not{c}\\
&\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\gamma^\mu=2(\not{d}\not{a}\not{b}\not{c}+\not{c}\not{b}\not{a}\not{d})+(n-4)\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}
\end{aligned} \qquad (29)$$

(その他の縮約公式として一般式 (18) がある。)

$$\begin{aligned}
&\not{a}\not{a}=a^2\\
&\not{a}\not{b}=a\cdot b+a_\mu b_\nu\gamma^{\mu\nu} &&[(21)\text{ より}]\\
&\not{a}\gamma_\mu\not{a}=-a^2\gamma_\mu+2a_\mu\not{a} &&[(24)\text{ より}]
\end{aligned} \qquad (30)$$

C. Feynman グラフの積分公式

C-1 Feynman のパラメータ公式

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1 dx\,\frac{1}{[ax+b(1-x)]^2} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{abc}=\int_0^1 2ydy\int_0^1 dx\,\frac{1}{[ayx+by(1-x)+c(1-y)]^3} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 dx\,\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[ax+b(1-x)]^{\alpha+\beta}} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}&=\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_{n-1}\\ &\quad\times\frac{(n-1)!\,x_2x_3{}^2\cdots x_{n-1}^{n-2}}{[(a_1-a_2)x_1\cdots x_{n-1}+(a_2-a_3)x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-a_n)x_{n-1}+a_n]^n}\\ &=\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 dx_n\frac{(n-1)!\,\delta(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)}{[a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n]^n}\end{aligned} \tag{4}$$

一般式 (4) の 2 表式のうち，形式的には第 2 式が美しいが，実用上は第 1 式が計算しやすい。後者は (3) をくり返し使えば出る。(3) や (4) の第 2 式は，べき $z^{-\alpha}$ を指数関数 e^{-izt} に直す公式 **7-1** (5)

$$\frac{1}{z^\alpha}=\frac{i^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-izt}t^{\alpha-1}\,dt \qquad [\mathrm{Im}\, z<0,\ \mathrm{Re}\,\alpha>0] \tag{5}$$

を各因子 $a_i^{-\alpha_i}$ に適用し，そのとき現れる n 個の積分変数 $t_1, \cdots, t_n$ に対し，$t_i=x_it$ $(0\leqq t<\infty,\ 0\leqq x_i\leqq 1,\ \sum_i x_i=1)$ の変数変換をやればすぐ導ける。

C-2 次元正則化による n 次元積分公式

($n/2\equiv\eta$ と記す。$m^2-i\epsilon$ の $-i\epsilon$ は省略。)

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\ln(m^2+2k\cdot p-k^2)=-\frac{\Gamma(-\eta)}{(4\pi)^\eta}(m^2+p^2)^\eta \tag{6}$$

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{1}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}} \tag{7}$$

$$\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{k^\mu}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha-\eta)}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\frac{p^\mu}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{k^\mu k^\nu}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}\\ &=\frac{1}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha-\eta)\frac{p^\mu p^\nu}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}}-\Gamma(\alpha-1-\eta)\frac{(1/2)\,g^{\mu\nu}}{(m^2+p^2)^{\alpha-1-\eta}}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^nk}{i(2\pi)^n}\frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}\\ &=\frac{1}{(4\pi)^\eta\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha-\eta)\frac{p^\mu p^\nu p^\rho}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}}-\Gamma(\alpha-1-\eta)\frac{(1/2)\,g^{(\mu\nu}p^{\rho)}}{(m^2+p^2)^{\alpha-1-\eta}}\right]\end{aligned} \tag{10}$$

$$\int \frac{d^n k}{i(2\pi)^n} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(m^2+2k\cdot p-k^2)^\alpha}$$
$$=\frac{1}{(4\pi)^\eta \Gamma(\alpha)}\left[\Gamma(\alpha-\eta)\frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{(m^2+p^2)^{\alpha-\eta}}-\Gamma(\alpha-1-\eta)\frac{(1/2)\,g^{(\mu\nu}p^\rho p^{\sigma)}}{(m^2+p^2)^{\alpha-1-\eta}}\right.$$
$$\left.+\Gamma(\alpha-2-\eta)\frac{(1/4)\,g^{(\mu\nu}g^{\rho\sigma)}}{(m^2+p^2)^{\alpha-2-\eta}}\right] \qquad (11)$$

(10), (11) 中の添字についた ( ) は完全対称和を表す：

$$g^{(\mu\nu}p^{\rho)}=g^{\mu\nu}p^\rho+g^{\nu\rho}p^\mu+g^{\rho\mu}p^\nu$$
$$g^{(\mu\nu}p^\rho p^{\sigma)}=g^{\mu\nu}p^\rho p^\sigma+g^{\mu\rho}p^\nu p^\sigma+g^{\mu\sigma}p^\nu p^\rho+g^{\nu\rho}p^\mu p^\sigma+g^{\nu\sigma}p^\mu p^\rho+g^{\rho\sigma}p^\mu p^\nu$$
$$g^{(\mu\nu}g^{\rho\sigma)}=g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \qquad (12)$$

C-3 Γ 関数

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z>0)$$
$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \qquad (13)$$
$$\Gamma(m+1)=m! \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$
$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

$\varepsilon\equiv(4-n)/2\ll 1$ のとき，(γ : Euler 定数)

$$\Gamma(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\frac{1}{2}\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$
$$\Gamma(\varepsilon-1)=-\frac{1}{\varepsilon}+(\gamma-1)-\frac{1}{2}\left(\gamma^2-2\gamma+\frac{\pi^2}{6}\right)\varepsilon+O(\varepsilon^2) \qquad (14)$$
$$\Gamma(\varepsilon-n)=\frac{(-)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)-\gamma\right]+O(\varepsilon)$$

D. 行列・演算子に関する便利な公式

D-1 相似変換

行列 (または演算子) X, Y に対して

$$e^Y X e^{-Y}=X+[Y,X]+\frac{1}{2!}[Y,[Y,X]]+\cdots=[\exp\Delta_Y]X \qquad (1)$$

ただし $^\forall Z$ に対し　$\Delta_Y Z\equiv[Y,Z]$

D-2 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

$$e^X e^Y=\exp\left\{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]])+\cdots\right\} \qquad (2)$$

特に，$[X, Y]$ が X とも Y とも可換な場合，次式が従う：

$$\begin{aligned} &e^X e^Y = e^{[X,Y]} e^Y e^X \\ &e^{X+Y} = e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} e^X e^Y \\ &(e^X e^Y)^n = \exp\left\{\frac{n(n+1)}{2}[X, Y]\right\} e^{nY} e^{nX} \end{aligned} \tag{3}$$

D-3 変　　分

Feynman の公式： X を $X+\delta X$ に変化させたときの e^X の変化は

$$\delta(e^X) = \int_0^1 d\alpha\, e^{(1-\alpha)X} \delta X\, e^{\alpha X} \tag{4}$$

行列式の変分

$$\delta(\det M) = \det M \cdot (M^{-1})^{ij} \delta M_{ij} \tag{5}$$

D-4 行列，行列式

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - CB^{-1}D & CB^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}C \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\therefore \ \det M = \det(A - CB^{-1}D) \cdot \det B = \det A \cdot \det(B - DA^{-1}C) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\ln\det M = \mathrm{tr} \ln M \\ &\ln(MN) = \ln M + \ln N + \frac{1}{2}[\ln M, \ln N] + \cdots \\ &\det(1+\varepsilon X) = 1 + \varepsilon\, \mathrm{tr} X + \frac{1}{2}\varepsilon^2[(\mathrm{tr} X)^2 - \mathrm{tr}(X^2)] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{8}$$

D-5 生成・消滅演算子

1 自由度系で：　：を正規順序積として

$$:\exp(\tau a^\dagger a): = \exp[a^\dagger a \ln(1+\tau)] \tag{9}$$

特にパラメータ $\tau \to -1$ の極限で真空への射影演算子となる：

$$:\exp(-a^\dagger a): = |0\rangle\langle 0| \tag{10}$$

n 自由度系 $a_i^{(\dagger)}$ $(i=1, \cdots, n)$ で，M, N を $n \times n$ 行列として

$$\begin{aligned} &\exp\left(\frac{1}{2} a N a\right) \exp\left(\frac{1}{2} a^\dagger M a^\dagger\right) |0\rangle \\ &\quad = \det{}^{-\frac{1}{2}}(1 - MN) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} a^\dagger M \frac{1}{1-NM} a^\dagger\right) |0\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

D-6 Wick の定理

$\phi(x)$ を自由場，$J(x)$ を外場，$J_x \phi_x \equiv \int d^n x\, J(x) \phi(x)$ としたとき，

$$\mathrm{T}\,e^{J_x\phi_x}=\exp\left(\frac{1}{2}J_y\langle 0|\mathrm{T}\,\phi_y\phi_z|0\rangle J_z\right):e^{J_x\phi_x}: \tag{12}$$

この等式は，T が時間順序積でも，反時間順序積でも，反正規順序積でも，T=1 (そのままの積) でも何でも成立する。T=1 の場合は (3) の Baker-Hausdorff 公式と同じ。

文献解説

本文中にほとんど文献を引用しなかったので，ここに一括してあげておく。教科書の類は日本語で読めるものを優先した。この文献解説は読者の便宜のためのものであり，本文の内容に直接関連した文献に限った。決して完全な文献表を作ることを意図したものでないので，引用から脱落している著者方にはお許し頂きたい。

1. Lorentz 群の表現と場

Lorentz 群の表現に関しては数学的文献はたくさんあるはずだが，ここでは本文の内容に関連の深い (物理学者の書いた) 教科書

(1.1) 大貫義郎：ポアンカレ群と波動方程式 (応用数学叢書，岩波書店，1976)

をあげるにとどめる。

2. 場の量子化

場の量子論に関する教科書としては

(2.1) ベレステツキー・リフシッツ・ピタエフスキー：相対論的量子力学 1 [ランダウ・リフシッツ] (井上訳，東京図書，1969),

(2.2) 高橋 康：物性研究者のための場の量子論 I (新物理学シリーズ 16，培風館，1974),

(2.3) 中西 襄：場の量子論 (新物理学シリーズ 19，培風館，1975),

(2.4) 西島和彦：場の理論 (数学叢書 27，紀伊國屋書店，1987),

をあげておく。この他，邦訳がないが定評ある教科書として

(2.5) J. D. Bjorken and S. D. Drell：*Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, 1965),

(2.6) K. Nishijima：*Fields and Particles* (W. A. Benjamin, 1969),

(2.7) C. Itzykson and J.-B. Zuber，*Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).

CPT 定理は Lüders，Zumino，Pauli らにより初めて証明された：

(2.8) G. Lüders：Ann. Phys. (N. Y.) **2** (1957) 1.

公理論的枠組での CPT 定理，スピンと統計，局所性の関連は

(2.9) R. F. Streater and A. S. Wightman：*PCT, Spin & Statistics, and all that* (W. A. Benjamin, 1964).

3. 相互作用系の一般的性質と S 行列

スペクトル表示を初めて与えたのは

(3.1) H. Umezawa and S. Kamefuchi：Prog. Theor. Phys., **6** (1951) 543,

(3.2) G. Källén：Helv. Phys. Acta **25** (1952) 417.

LSZ の漸近条件および簡約公式は

(3.3) H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann：Nouvo Cim. **1** (1955) 205; **6** (1957) 319,

で与えられ，Haag-GLZ 公式は次の論文による：

(3.4) R. Haag：Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd. **29** (1955) No.12,

(3.5) V. Glaser, H. Lehmann and W. Zimmermann：Nouvo Cim. **6** (1957) 1122.

4. 経路積分と摂動論

経路積分のよい教科書は

(4.1) R. P. Feynman and A. R. Hibbs：*Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965),

(4.2) 崎田文二, 吉川圭二：径路積分による多自由度の量子力学 (物理学選書, 岩波書店, 1986).

特に後者では，経路積分の境界条件と Green 関数の関係や，演算子順序の問題なども詳しく議論してある。経路積分を場の理論へ適用する際，中点処法の意味と重要性を指摘したのは

(4.3) J.-L. Gervais and A. Jevicki：Nucl. Phys. **B110** (1976) 93,

(4.4) M. Sato：Prog. Theor. Phys. **58** (1977) 1262.

Weyl 変換についての本書の解説は次の論文に従った：

(4.5) M. M. Mizrahi：Jour. Math. Phys. **16** (1975) 2201.

速度に依存するポテンシャルの場合，Lee-Yang 項を付け加える必要性のあることを指摘したのは

(4.6) T. D. Lee and C. N. Yang：Phy. Rev. **128** (1962) 885.

フェルミオン場の経路積分は

(4.7) F. A. Berezin：*The Method of Second Quantization* (Academic Press, 1966),

(4.8) Y. Ohnuki and T. Kashiwa：Prog. Theor. Phys. **60** (1978) 548.

有効作用の概念は

(4.9) J. Schwinger：Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951) 452, 455,

(4.10) G. Jona-Lasinio：Nouvo Cim. **34** (1964) 1790.

有効ポテンシャルの概念は，対称性の自発的破れの議論において特に重要であるが，その適用はすでに

(4.11) J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg：Phys. Rev. **127** (1962) 965

に見られる。輻射補正による自発的破れに適用したのは

(4.12) S. Coleman and E. Weinberg：Phys. Rev. **D7** (1973) 1888.

有効作用と 1 粒子既約グラフとの関係についての本書の説明は

(4.13) C. De Dominicis and P. C. Martin：J. Math. Phys. **5** (1964) 14, 31,
(4.14) 九後汰一郎：素粒子論研究 **53** (1976) 1

による。経路積分による有効作用，有効ポテンシャルの評価公式は

(4.15) R. Jackiw：Phys. Rev. **D6** (1973) 1686.

S 行列の生成汎関数の概念も Schwinger (4.9) によるが，次の教科書

(4.16) L. D. Faddeev and A. A. Slavnov：*Gauge Fields*：*Introduction to Quantum Theory* (D. B. Pontecorvo 英訳，Benjamin / Cummings, 1980)

でも解説されている。有効ポテンシャルの実部が基底状態のエネルギー密度であり，虚部がその崩壊確率を与えるとの解釈は，Coleman の次の優れた講義録に見られる：

(4.17) S. Coleman："Secret Symmetry" in *Laws of Hadronic Matter* (Proc. of International School of Physics "Ettore Majorana", Academic Press, 1975).

ループ数による展開が $\hbar$ 展開であるとの認識は

(4.18) Y. Nambu：Phys. Letters **26B** (1966) 626.

熱平衡系に関して本書では松原温度 Green 関数を用いるいわゆる虚時間型式のみを紹介したが，直接時間依存 Green 関数を扱える実時間型式も美しい形で展開されている：

(4.19) Y. Takahashi and H. Umezawa：Collective Phenom. **2** (1975) 55.

虚時間型式への経路積分法の適用は

(4.20) L. Dolan and R. Jackiw：Phys. Rev. **D9** (1974) 3320.

経路積分法による実時間型式の再導出は

(4.21) A. J. Niemi and G. W. Semenoff：Ann. Phys. **152** (1984) 105.

統計力学におけるダイアグラム技法の解説は，例えば

(4.22) 戸田盛和・久保亮五 (編)：統計物理学 (岩波講座 現代物理学の基礎 (第2版) 5, 1978).

5. ゲージ場の量子論

Lie 群や Lie 代数の表現についての物理学者向けの教科書は，例えば

(5.1) 山内恭彦・杉浦光夫：連続群論入門 (新数学シリーズ 18，培風館，1968),
(5.2) 竹内外史：リー代数と素粒子論 (裳華房，1983)
(5.3) H. Georgi：*Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin / Cummings, 1982).

特異系に対する正準形式の一般論を展開したのは Dirac であるが，彼自身の講義ノートが非常によい：

(5.4) P. A. M. Dirac：*Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ., 1964).

日本語では教科書 (4.2) にも簡潔な解説がある。Dirac 括弧の Lagrange 括弧を経由する計算法は

(5.5) A. J. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim：*Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nationale dei Lincei, 1974)

(5.6) 九後汰一郎：素粒子論研究 **71** (1985) 49.

第1類拘束条件のみがある特異系での経路積分表式を論じたのは

(5.7) L. D. Faddeev：Theor. Math. Phys. **1** (1970) 1.

それを第2類拘束条件も含む系へ一般化したのは

(5.8) H. Yabuki：京都大学数理解析研プレプリント RIMS-183 (1975),

(5.9) P. Senjanovic：Ann. Phys. **100** (1976) 227.

ゲージ場の量子論全般にわたる，経路積分のモダンな方法に基づいた教科書は，現在では上掲の (2.7) や (4.16) や

(5.10) P. Ramond：*Field Theory：A Modern Primer* (Benjamin / Cummings, 1981),

その他数多くある。しかし，1970年代には皆無であって，その方面の初めての総合報告

(5.11) E. S. Abers and B. W. Lee：Phys. Reports **9C** (1973) 1

は大きな役割を果たした。

非可換ゲージ理論で FP ゴーストが必要なことを初めて 1-loop レベルで認識したのは Feynman で，DeWitt はそれを任意 loop へ一般化した：

(5.12) R. P. Feynman：Acta Phys. Polonica **26** (1963) 697,

(5.13) B. S. DeWitt：Phys. Rev. **162** (1967) 1195, 1239.

経路積分法に基づき初めて (Landau ゲージで) 系統的に導いたのが

(5.14) L. D. Faddeev and V. N. Popov：Phys. Lett. **25 B** (1967) 29.

一般の α の共変ゲージの場合へ拡張したのは 't Hooft の記念碑的論文

(5.15) G. 't Hooft：Nucl. Phys. **B33** (1971) 173.

α-共変ゲージでの BRS 不変性を発見したのは

(5.16) C. Becchi, A. Rouet and R. Stora：Comm. Math. Phys, **42** (1975) 127；Ann. Phys. **98** (1976) 287.

彼らとは独立に Tyutin も次の論文

(5.17) I. V. Tyutin：Lebedev プレプリント FIAN No. 39 (ロシア語), 1975

で発見したとされ，今日 BRST 不変性と呼ばれることも多いが，筆者はまだ (5.17) の論文を見たことがない。**5-4** で述べた，ゲージ固定条件の選択の仕方によらない一般的 BRS 変換則の決め方および $\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP}=\boldsymbol{\delta}_B(*)$ の形のゲージ固定処法は

(5.18) T. Kugo and S. Uehara：Nucl. Phys. **B197** (1982) 378.

共変ゲージ非可換ゲージ理論の正準演算子型式での初めての無矛盾な定式化は，特に $Q_B|\mathrm{phys}\rangle=0$ の補助条件の提唱は，

(5.19) T. Kugo and I. Ojima：Phys. Lett. **73 B** (1978) 459.

5章後半の内容の多くは，その総合報告

(5.20) T. Kugo and I. Ojima：Prog. Theor. Phys. Supplement **66** (1979) 1

に負う。可換ゲージ理論の場合に初めて不定計量を導入し有名な補助条件を与え

たのは

(5.21) S. N. Gupta：Proc. Phys. Soc. **A63** (1950) 681,

(5.22) K. Bleuler：Helv. Phys. Acta **23** (1950) 567.

Feynman ゲージ (α=1) でのこの Gupta-Bleuler 型式を一般の α- 共変ゲージに拡張し，QED の正準演算子型式を完成させたのは

(5.23) N. Nakanishi：Prog. Theor. Phys. **35** (1966) 1111; **49** (1973) 640; **52** (1974) 1929,

(5.24) B. Lautrup：Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd. **35** (1967) No. 11, 1.

QED のこの定式化も含む不定計量の場の理論の総合報告は

(5.25) N. Nakanishi：Prog. Theor. Phys. Supplement **51** (1972) 1.

Ward-高橋恒等式の名は，まず Ward が発見し高橋により一般化された QED の場合の恒等式にちなむ：

(5.26) J. C. Ward：Phys. Rev. **78** (1950) 182,

(5.27) Y. Takahashi：Nouvo Cim. **6** (1957) 371.

非可換ゲージ理論の場合の WT 恒等式は

(5.28) A. A. Slavnov：Theor. Math. Phys. **10** (1972) 99,

(5.29) J. C. Taylor：Nucl. Phys. **B33** (1971) 436.

これを **5-6** (11) の形で与え，くりこみの議論を簡単化したのは BRS の論文(5.16)および

(5.30) J. Zinn-Justin："Renormalization of Gauge Theories" in *Lecture Notes in Physics* **37** (Springer, 1975),

(5.31) B. W. Lee："Gauge Theories" in *Methods in Field Theory*, Les Houches 1975 (North-Holland, 1976).

5-7 で説明したような Feynman グラフの図形変形の手法で導いたのは

(5.32) G. 't Hooft and M. Veltman：Nucl. Phys. **B50** (1972) 318.

この手法を徹底した diagrammar の立場での場の理論の再構築は

(5.33) G. 't Hooft and M. Veltman："Diagrammar" in *Particle Interactions at Very High Energies* (Nato Advanced Study Institute Series) (D. Speiser 編，Plenum Press, 1974).

保存電荷による変換が漸近場の上では一般に線形となることはよく知られている (唯一の例外は 2 次元時空で零質量粒子の場合) が，**5-8** で紹介した〝素朴な証明″は文献 (2.3)，WT 恒等式を利用した証明は

(5.34) T. Kugo and I. Ojima：Prog. Theor. Phys. **61** (1979) 294

に与えられているものである。

非可換ゲージ理論の物理的 S 行列のユニタリー性の証明は，くりこみ可能性の証明と同時に，'t Hooft の初めの論文 (5.15) および

(5.35) G. 't Hooft：Nucl. Phys. **B35** (1971) 167

において与えられたが難解でよくわからない。WT 恒等式を用いてこれをより詳しく展開したのが

(5.36) B. W. Lee and J. Zinn-Justin: Phys. Rev. **D5** (1972) 3121, 3137,
および 't Hooft-Veltman (5.32) である。が，これらが実際に与えたのは，**5-11** で述べた物理的 S 行列のゲージ固定非依存性の証明である。非物理的モードの存在しない Coulomb ゲージやユニタリー・ゲージとの等価性が言えるから，一般の α- 共変ゲージでも非物理的モードの寄与は相殺しているはずであり，$S_{\rm phys}$ はユニタリーだという論理である。これに対し，一般の α-共変ゲージで直接非物理的モード間のノルム相殺を示し，$S_{\rm phys}$ のユニタリー性の直接証明を初めて閉じた形で与えたのが (5.19) である。

(5.19) の非物理的モード間のノルム相殺が，実は摂動論によらず単に BRS 代数の表現だけから帰結する一般的な機構であることを初めて認識し，カラー閉じ込めの機構にも適用できることを指摘したのは

(5.37) T. Kugo: Phys. Letters **83 B** (1979) 93.

この BRS 代数の表現論および 4 重項機構の詳細は総合報告 (5.20) で初めて与えられた。そこで仮定されていた $N_{\rm FP}\neq 0$ の BRS1 重項 (対) の非存在に関しては，すぐに中西により証明が与えられた：

(5.38) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 1385.

非可換ゲージ理論における観測可能量の問題は

(5.39) I. Ojima: Nucl. Phys. **B143** (1978) 340

により初めて議論された。運動方程式が "Maxwell" 方程式 **5-5** (58) の形に書けることも初めてそこで指摘された。局所的観測可能量の形に対する **5-10** 最後の定理は

(5.40) T. Kugo and S. Uehara: Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 1395.

反 BRS 対称性が存在することの指摘は

(5.41) G. Curci and R. Ferrari: Phys. Letters **63 B** (1976) 91,

(5.42) I. Ojima: Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 625.

Landau ゲージでより大きな拡大 BRS 代数が存在することは

(5.43) N. Nakanishi and I. Ojima: Z. Phys. **C6** (1980) 155; **C8** (1981) 94.

BRS 代数，拡大 BRS 代数のより詳しい表現論は

(5.44) K. Nishijima: Nucl. Phys. **B238** (1984) 601; Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 1214; **73** (1985) 536; **80** (1988) 897,905,

および教科書 (2.4) に見られる。

演習問題略解

演習問題　1.

1.2　後半は，t をパラメータとして導入し，

$$\Lambda^\mu{}_\nu(t)\equiv[\exp t(i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}+i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K})]^\mu{}_\nu, \qquad a(t)\equiv\exp t\left(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right),$$

$$A^\mu{}_\nu(t)\equiv\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^\mu a(t)\sigma_\nu a^\dagger(t))$$

を定義したとき，$\Lambda^\mu{}_\nu(t)$ と $A^\mu{}_\nu(t)$ が $t=1$ で一致することをいえばよい。$t=0$ で一致するのは自明だから，それらが t に関して同じ1階微分方程式を満たすことを示せば十分である。$\Lambda^\mu{}_\nu(t)$ は，問題中に与えた $i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}+i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}$ の 4×4 行列を $X(\theta,\omega)$ と呼べば，

$$(d/dt)\Lambda^\mu{}_\nu(t)=\Lambda^\mu{}_\rho(t)X^\rho{}_\nu(\theta,\omega)$$

を満たす。一方，$A^\mu{}_\nu(t)$ は，$\sigma_\nu=(1,\boldsymbol{\sigma})$ および Pauli 行列の交換関係を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A^\mu{}_\nu(t)&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\bar{\sigma}^\mu a(t)\left[(i\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\omega})\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\sigma_\nu+\sigma_\nu\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(-i\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\omega})\right]a^\dagger(t)\right\}\\&=\begin{cases}-\omega_i A^\mu{}_i(t) & \nu=0\ \text{のとき}\\ \epsilon_{ijk}\theta_j A^\mu{}_k(t)-\omega_i A^\mu{}_0(t) & \nu=i\ \text{のとき}\end{cases}\\&=A^\mu{}_\rho(t)X^\rho{}_\nu(\theta,\omega)\end{aligned}$$

を満たすことがわかり，$\Lambda^\mu{}_\nu(\rho)$ の方程式と一致する。

1.4　無限小 dilatation 変換 $\delta\phi(x)\equiv\phi'(x)-\phi(x)$ は次の形となる：

$$\delta\phi(x)=(1+x^\mu\partial_\mu)\phi(x).$$

Lagrangian $\mathcal{L}$ は，次元が4だから，有限 dilatation 変換で $\mathcal{L}'(x')=e^{4\alpha}\mathcal{L}(x)$ と変換し，したがって，無限小変換の下で

$$\delta\mathcal{L}(x)=(4+x^\mu\partial_\mu)\mathcal{L}(x)=\partial_\mu(x^\mu\mathcal{L}(x)).$$

これより，Noether カレントの定義式 1-3 (6) を用いれば

$$\begin{aligned}j_D^\mu&=(\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\phi))(1+x^\nu\partial_\nu)\phi-x^\mu\mathcal{L}\\&=x^\nu(\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi-\delta^\mu_\nu\mathcal{L})+(\partial_\mu\phi)\phi=x^\nu T_\nu{}^\mu+\frac{1}{2}\partial^\mu(\phi^2)\end{aligned}$$

が出る。後半は，望みの関係式 $D^\mu=x^\nu\Theta_\nu{}^\mu$ に定義式を代入すれば

$$\begin{aligned}a(x\cdot\partial\,\partial^\mu-x^\mu\Box)\phi^2-\frac{1}{2}\partial^\mu(\phi^2)&=b\ \partial_\rho[(x^\mu\partial^\rho-x^\rho\partial^\mu)\phi^2]\\&=b[(1-4)\partial^\mu(\phi^2)+(x^\mu\Box-x\cdot\partial\,\partial^\mu)\phi^2]\end{aligned}$$

が成り立てばよいことがわかるので，$a=-b=-1/6$ が求まる。$\partial_\mu D^\mu=\partial^\mu(x^\nu\Theta_\nu{}^\mu)=\Theta_\mu{}^\mu$ は Θ の保存則 $\partial^\nu\Theta_\nu{}^\mu=0$ から当然で，$\Theta_\mu{}^\mu=\mu^2\phi^2$ は運動方程式を用いて計算すれば出る。

1.5 (i, j) 平面内の回転の無限小形は

$$\delta_{[i,j]}\phi_k = \delta_{ik}\phi_j - \delta_{jk}\phi_i.$$

回転面 (i, j) のとり方は ${}_N C_2$ 通りあるから, $O(N)$ の独立な回転は $N(N-1)/2$ 個ある。Lagrangian の不変性 $\delta_{[i,j]}\mathcal{L}=0$ を用いて，Noether カレントをつくれば

$$j^\mu_{[i,j]} = \partial^\mu\phi_i\cdot\phi_j - \partial^\mu\phi_j\cdot\phi_i.$$

1.7 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma = 4\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma)$.

1.8 まじめにやればできる。解答は T.Kugo and I. Ojima, Nucl. Phys. B144 (1978) 234 の論文の付録を見よ。

演習問題 2.

2.4 1） スピン 3 重項に対応するスピン波動関数 $\sigma_{ss'}$ は 2×2 行列として

$$\epsilon\boldsymbol{\sigma},\quad \text{すなわち},\quad \epsilon\sigma_+(S_z=+1),\ \epsilon\sigma_3(S_z=0),\ \epsilon\sigma_-(S_z=-1).$$

スピン 1 重項の $\sigma_{ss'}$ は $\epsilon\equiv i\sigma_2$.

2） $P=(-)^{l+1}$

3） $C=(-)^{l+S}$ (スピン波動関数は $S=1$ が対称，$S=0$ が反対称に注意せよ。)

2.5 1） 二つの Grassmann 数 θ, χ の積に対する複素共役の規則 $(\theta\chi)^*=\chi^*\theta^*$ により，

$$(\theta^T\epsilon\xi)^\dagger = \xi^\dagger\epsilon^\dagger\theta^* = -\xi^\dagger\epsilon\theta^*$$

となること，またスピノールの Grassmann 数性から $\theta^T\Gamma\xi = -\xi^T\Gamma^T\theta$，さらに公式 $\epsilon\sigma^\mu\epsilon = -\bar{\sigma}^{\mu T}$，などを用いれば，容易である。

2） $\phi(x)=\xi(x)$ の上で示す場合には，σ_μ の完全性 1-2 (33)，$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta_\alpha^\delta\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}$, から従う次の Fierz 恒等式 (一般論は付録 B-4 参照) を利用する： 任意の三つの 2 成分スピノール $\theta_\alpha, \chi_\alpha, \xi_\alpha$ に対して

$$\theta_\alpha(\chi^\dagger\bar{\sigma}_\nu\xi) = -\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}_\nu\xi)_\alpha(\chi^\dagger\bar{\sigma}_\mu\theta),$$

$$\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\theta^*_{\dot{\gamma}}(\chi^T\epsilon\xi) = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\xi_\alpha(\theta^\dagger\bar{\sigma}_\mu\chi),$$

などが成り立つ。

演習問題 3.

3.1 仮定より，特に真空期待値に対して

$$\lim_{t\to-\infty}\langle 0|[\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{y}, t)]|0\rangle = Z\langle 0|[\phi^{\text{in}}(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}^{\text{in}}(\boldsymbol{y}, t)]|0\rangle$$

となる。左辺は Heisenberg 場の同時刻交換関係 3-1 (27) により $i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ となり, 右辺も, 漸近場の 4 次元交換関係 3-2 (5) により $Zi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ となるから $Z=1$ が結論される。

3.2 前半は，$[iQ, \phi^{\text{out}}]=q\phi^{\text{out}}$ に $\phi^{\text{out}}=S^\dagger\phi^{\text{in}}S$ を代入して

$$[iQ, S^\dagger]\phi^{\text{in}}S + S^\dagger[iQ, \phi^{\text{in}}]S + S^\dagger\phi^{\text{in}}[iQ, S] = S^\dagger q\phi^{\text{in}}S.$$

左辺第 2 項と右辺が相殺すること，および $S^\dagger S=1$ から従う $[iQ, S^\dagger] = -S^\dagger[iQ, S]S^\dagger$ を用い，左辺第 1·3 項に左から S，右から $S^\dagger$ を掛ければ

$$[[iQ, S]S^\dagger, \phi^{\text{in}}]=0$$

が導ける。漸近的完全性の仮定により，すべての $\phi^{\mathrm{in}}(x)$ と可換なものは c 数しかないので，$[iQ,S]S^{\dagger}=c$ 数 が従う。この c 数は両辺真空期待値をとれば，$Q|0\rangle=0$，$S^{\dagger}|0\rangle=|0\rangle$ より 0 であることがわかり，$[iQ,S]=0$ が結論できる。

演 習 問 題 4.

4.1 $\Delta(p,q)$ の 3 表式が等しいことは，次の等式等を使えばよい。

$$|p\rangle\langle p|=\delta(\boldsymbol{p}-p),\qquad |p-(u/2)\rangle=e^{-iq\frac{u}{2}}|p\rangle$$

$$e^{-iq\frac{u}{2}}e^{-ipv}e^{-iq\frac{u}{2}}=e^{-iqu-ipv}\qquad \text{(付録 D の公式 (3) より)}$$

4.2 一般相対論において，スカラー場にかかる不変 Laplacian が $\Delta\phi\equiv(1/\sqrt{g})\partial_\mu\sqrt{|g|}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$ であったことを思い起こせ。

4.3 1） tree レベルの有効ポテンシャルは $V=-\mu^2\varphi^*\varphi+(\lambda/2)(\varphi^*\varphi)^2$. これの極小条件より，$\varphi$ は $|\varphi|=\sqrt{\mu^2/\lambda}\equiv v/\sqrt{2}$ の真空期待値を実現する。

2） 積分変数を $\varphi',\varphi^{*\prime}$ にしたものと元のものとの差は，$\mathcal{D}\varphi'\mathcal{D}\varphi^{*\prime}=\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi^*$ を用いて

$$\delta\left[\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi^*\ \varphi(x)e^{i\int dx\,\mathcal{L}(\varphi)}\right]=\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi^*(\delta\varphi(x)+i\varphi(x)\int dy\ \mathcal{L}(y))e^{i\int dx\,\mathcal{L}(\varphi)}=0.$$

積分は変数のとり方によらないから，これは 0 である。この式に $\delta\varphi(x)=i\theta\varphi(x)$，$\delta\mathcal{L}=0$ を使えばよい。($\mathcal{L}$ の対称性から従うこの種の等式を Ward-高橋 (WT) 恒等式という。)

3） 上の WT 恒等式は，$\mathcal{L}$ に $U(1)$ 不変性を破る $i\epsilon$ 項が存在すれば

$$\delta\mathcal{L}(y)=\theta\epsilon(\varphi(y)\langle\varphi\rangle^*-\varphi^*(y)\langle\varphi\rangle)\neq 0$$

であるから，$\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi^*\ F(\varphi)e^{i\int dx\,\mathcal{L}}\equiv\langle F(\varphi)\rangle$ の記号を用いて

$$\left\langle\varphi(x)+\epsilon\varphi(x)\int dy\ (\varphi(y)\langle\varphi\rangle^*-\varphi^*(y)\langle\varphi\rangle)\right\rangle=0$$

となる。$\epsilon\to 0$ で第 2 項が消えるように一見思えるが，6-2 に示すように，真空期待値 $\langle\varphi\rangle$ を実数 $v/\sqrt{2}$ に選び，複素場 φ を $\varphi(x)=(v+\psi(x)+i\chi(x))/\sqrt{2}$ と二つの実場 $\psi(x),\chi(x)$ で書くと，$\chi(x)$ が零質量粒子 (南部-Goldstone 粒子) となり，$i\epsilon$ 項の存在下でその伝播関数は，tree レベルで

$$\langle\chi(x)\chi(y)\rangle=\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}\frac{1}{-i\epsilon-k^2}$$

となる。これを上の WT 恒等式第 2 項に代入すれば，$\int dy$ 積分で $k^\mu=0$ 部分が取り出され，伝播関数が $1/\epsilon$ の特異性を出し，$\epsilon\to 0$ でも有限の寄与 $\epsilon\langle\varphi\rangle i^2/\epsilon=-\langle\varphi\rangle$ を与える。よって WT 恒等式は $\langle\varphi(x)-\langle\varphi\rangle\rangle=0$ すなわち矛盾のない等式 $\langle\varphi(x)\rangle=\langle\varphi\rangle$ を与える。

4.4 1） 周期性の条件より $\omega_n=2\pi n/\beta\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ と量子化される。$N'(\beta)$ を求めるとき，$\phi(x)$ の Gauss 積分を，運動量表式 $\phi_n(\vec{k})$ で行うが，$\prod_x\mathcal{D}\phi(x)=\prod_{n,\vec{k}}\mathcal{D}(\phi_n(\vec{k})/\beta)$ に注意する。

2） $N'(\beta)=\exp\left[\sum_n\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{-\frac{1}{2}\ln((2\pi n)^2+\beta^2E^2)\right\}\right]$ $\qquad(E\equiv\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2})$

として，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln((2\pi n)^2+\beta^2E^2)=\int^{\beta^2E^2}dt^2\sum_n\frac{1}{(2\pi n)^2+t^2}$$
$$=\int^{\beta^2E^2}dt^2\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{e^z-1}\frac{1}{(-z^2+t^2)}$$

と書き直す。ただし β に依存しない定数を無視するので dt^2 積分の下限を指定せず，C は z 平面上の虚軸を囲む積分経路である。この複素積分は，積分経路を実軸を囲む経路に変形すれば，実軸上の $z=\pm t$ の極の留数で評価でき

$$\int^{\beta^2E^2}dt^2\frac{1}{2t}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{e^{-t}-1}\right)=2\ln(e^{\beta E}-1)-\beta E.$$

これより，望みの式 $Z_{自由}$ が得られる。

4.7 Schrödinger表示とHeisenberg表示の相互関係 $|\Psi_{\rm H}(t)\rangle=e^{iH(t-t_0)}|\Psi_{\rm S}(t)\rangle$ およびそれぞれの運動方程式の解

$|\Psi_{\rm S}(t)\rangle=e^{-iH[J](t-t_0)}|\Psi_{\rm S}(t_0)\rangle$, $|\Psi_{\rm H}(t)\rangle={\rm T}\exp\left[-i\int_{t_0}^{t}dt'd^3x\,J(\vec{x})\boldsymbol{\phi}(\vec{x},t')\right]|\Psi_{\rm H}(t_0)\rangle$

の比較より，次式が得られる：

$$e^{-iH[J](t_1-t_0)}=e^{-iH(t_1-t_0)}{\rm T}\exp\left[-i\int_{t_0}^{t_1}dt\,d^3x\,J(\vec{x})\boldsymbol{\phi}(\vec{x},t)\right].$$

望みの式 4-5 (21) は，この真空期待値をとり，$\boldsymbol{H}|0\rangle=0$ を用い，$t_1=-t_0=T/2\to\infty$ とすればよい。

4.8 1） ${\rm str}\,(M_1M_2)={\rm tr}(A_1A_2+\Delta_1\Gamma_2)-{\rm tr}(\Gamma_1\Delta_2+B_1B_2)={\rm tr}\,A_2A_1-{\rm tr}\,\Gamma_2\Delta_1+{\rm tr}\,\Delta_2\Gamma_1-{\rm tr}\,B_2B_1={\rm str}\,(M_2M_1)$. ただし，$\Delta,\Gamma$ が Grassmann 奇だから ${\rm tr}\,\Delta\Gamma=-{\rm tr}\,\Gamma\Delta$ が成立することを用いた。次に付録 D の Baker-Campbell-Hausdorff 公式 (2) で $e^X=M$, $e^Y=N$ と書けば，

$$\ln(MN)=\ln M+\ln N+\frac{1}{2}[\ln M,\ln N]+\frac{1}{12}([\ln M,[\ln M,\ln N]]+(M\leftrightarrow N))+\cdots.$$

この両辺の超トレースをとれば，右辺第 3 項以降の交換子項はすべて ${\rm str}\,M_1M_2={\rm str}\,M_2M_1$ の性質で落ちるから ${\rm str}(\ln MN)={\rm str}(\ln M)+{\rm str}(\ln N)$. よって ${\rm sdet}\,(MN)={\rm sdet}\,M\cdot{\rm sdet}\,N$. 次の ${\rm sdet}\,M$ に対する表式は付録 D の (6) の分解を使えば明らか。

2） $Q=(1/2)(\phi+A^{-1}\Delta\xi)^TA(\phi+A^{-1}\Delta\xi)+(1/2)\xi^T(B+\Delta A^{-1}\Delta)\xi$ と書き換え，$\phi'=\phi+A^{-1}\Delta\xi$ の変数変換を行えば，通常の Gauss 積分公式から明らか。

4.10 4-6 (22), 4-4 (46) の規則より，$\pi^-(k)\to l(p_1)+\bar{\nu}_l(p_2)$ 崩壊の不変散乱振幅は

$$\mathfrak{M}=-(G/\sqrt{2})\sqrt{2}f_\pi\cos\theta_{\rm C}\,ik^\mu\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v(\boldsymbol{p}_2,s_2)$$

で与えられる。$u(\boldsymbol{p}_1,s_1)$ はレプトン l の，$v(\boldsymbol{p}_2,s_2)$ は反ニュートリノ $\bar{\nu}_l$ の外線波動関数である。二体崩壊であるから公式 4-6 (42) を適用し

$$\Gamma(\pi^-\to l+\bar{\nu}_l)=\frac{|\boldsymbol{p}|}{8\pi m_\pi^2}\int\sum_{s_1,s_2}|\mathfrak{M}|^2d\Omega/4\pi.$$

終状態の l, $\bar{\nu}_l$ はスピンを持つので，s_1, s_2 について和をとった。($\bar{\nu}_l$ のヘリシティ

は $+1$ に決まっているが，そのことは $(1-\gamma_5)$ 射影で自動的に考慮されるので，s_2 について足し上げてかまわない。）　上の $\mathfrak{M}$ の表式は，運動量保存則 $k^\mu=p_1^\mu+p_2^\mu$，および Dirac 方程式 $\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)(\not{p}_1-m_l)=0$，$\not{p}_2 v(\boldsymbol{p}_2,s_2)=0$（ニュートリノ質量は 0），を使えば

$$\mathfrak{M}=-iG_\pi\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)(\not{p}_1+\not{p}_2)(1-\gamma_5)v(\boldsymbol{p}_2,s_2)=-iG_\pi m_l\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)(1-\gamma_5)v(\boldsymbol{p}_2,s_2)$$

となる。$G_\pi\equiv Gf_\pi\cos\theta_C$ とした。この段階で $\mathfrak{M}$ がレプトン質量 m_l に比例することに注意。この $\mathfrak{M}$ の表式および付録 A の公式 (18) を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{s_1,s_2}|\mathfrak{M}|^2&=\sum_{s_1,s_2}G_\pi^2m_l^2\bar{v}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_0(1-\gamma_5^\dagger)\gamma_0^\dagger u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)(1-\gamma_5)v(\boldsymbol{p}_2,s_2)\\&=G_\pi^2m_l^2\mathrm{tr}[\gamma_0(1-\gamma_5)\gamma_0(\not{p}_1+m_l)(1-\gamma_5)\not{p}_2]\\&=G_\pi^2m_l^2\mathrm{tr}[2(1+\gamma_5)(\not{p}_1+m_l)\not{p}_2]\\&=G_\pi^2m_l^2 8p_1\cdot p_2.\end{aligned}$$

$2p_1\cdot p_2=(p_1+p_2)^2-p_1^2-p_2^2=m_\pi^2-m_l^2$ であるから，これは角度 θ,φ によらず，上の Γ の $d\Omega/4\pi$ 積分は単に 1 を与える。また，終状態の $\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2\equiv\boldsymbol{p}$ の大きさは，

$$m_\pi|\boldsymbol{p}|=(p_1+p_2)\cdot p_2=p_1\cdot p_2+p_2^2=\frac{1}{2}(m_\pi^2-m_l^2)$$

より求まるから，$\Gamma(\pi^-\to l+\bar{\nu}_l)$ は

$$\Gamma(\pi^-\to l+\bar{\nu}_l)=\frac{(Gf_\pi\cos\theta_C)^2}{4\pi m_\pi^3}m_l^2(m_\pi^2-m_l^2)^2$$

となる。

$\Gamma(\pi^-\to l+\bar{\nu}_l)$ は m_l^2 に比例しているため圧倒的に $\pi^-\to\mu+\bar{\nu}_l$ が多い。実際

$$\frac{\Gamma(\pi^-\to e+\bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^-\to l+\bar{\nu}_l)}=\frac{m_e^2(m_\pi^2-m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2}\simeq 1.28\times10^{-4}$$

の値は，この分岐比の実験値 $(1.267\pm0.023)\times10^{-4}$ とよく一致している。$\pi^-\to\mu+\bar{\nu}_\mu$ が 100 % として，π^- の幅 $\Gamma\simeq3.84\times10^7\mathrm{sec}^{-1}$ を上の Γ の式が再現するためには $f_\pi\simeq 93\,\mathrm{MeV}\simeq0.67m_\pi$ と計算される。

演 習 問 題　5.

5.1　Poisson 括弧に関しては，次の順に示すのが賢明：

i）まず $(\partial/\partial q^i)F=(-)^{|F||i|+|i|}\partial F/\partial q^i$ を確かめ，$\{F,G\}_\mathrm{P}$ の定義 **5-2** (11) より，直接 $\{F,G\}_\mathrm{P}=-(-)^{|F||G|}\{G,F\}_\mathrm{P}$ を示す。ii) 1 階微分演算子 $\mathcal{L}_F\equiv(\partial F/\partial q^i)(\partial/\partial p_i)-(-)^{|i|}(\partial F/\partial p_i)(\partial/\partial q^i)$ を定義すれば，$\{F,G\}_\mathrm{P}=\mathcal{L}_FG$ と書ける。iii) 一般に 1 階微分演算子 $V_X=X^i(x)\partial/\partial x^i$ $[x^i=(q^i,p_i)]$ の graded 交換関係 $[V_X,V_Y\}\equiv V_XV_Y-(-)^{|X||Y|}V_YV_X$ は，2 階微分項が相殺して，また 1 階微分演算子となることを確かめる。iv) $\{F,\{G,H\}_\mathrm{P}\}_\mathrm{P}+(-)^{|F|(|G|+|H|)}\{G,\{H,F\}_\mathrm{P}\}_\mathrm{P}+(-)^{|H|(|F|+|G|)}\{H,\{F,G\}_\mathrm{P}\}_\mathrm{P}$ は，$(\partial F/\partial x^i)(\partial G/\partial x^j)(\partial^2H/\partial x^i\partial x^j)$ のような 2 階微分項の線形結合である。ところが，例えば H の 2 階微分項は，初めの 2 項中にのみあり，それは

$$\{F,\{G,H\}_\mathrm{P}\}_\mathrm{P}-(-)^{|F||G|}\{G,\{F,H\}_\mathrm{P}\}_\mathrm{P}=\mathcal{L}_F\mathcal{L}_GH-(-)^{|F||G|}\mathcal{L}_G\mathcal{L}_FH=[\mathcal{L}_F,\mathcal{L}_G\}H$$

となるから，H の 2 階微分項は存在せず，よって Jacobi 恒等式が成り立つ。

Dirac 括弧については，この Poisson 括弧を用いた定義 **5-2** (26) より直接計算

で行う。$C_{\alpha\beta}=(-)^{|\alpha||\beta|+1}C_{\beta\alpha}$ から $(C^{-1})^{\alpha\beta}=(-)^{|\alpha|+|\beta|+|\alpha||\beta|+1}(C^{-1})^{\beta\alpha}$ の対称性が従うことに注意。これから $\{F,G\}_{\mathrm{D}}=(-)^{|F||G|}\{G,F\}_{\mathrm{D}}$ はすぐ出る。Dirac 括弧に関する Jacobi 恒等式の証明は，F,G,H をすべて Grassmann 偶と仮定して一般性を失わない。(Grassmann 奇の量があれば，Grassmann 定数を掛けておけばよいから。) そうすれば証明すべき Jacobi 恒等式は

$$\sum_{\{F,G,H\}}\{F,\{G,H\}_{\mathrm{D}}\}_{\mathrm{D}}=0.$$

和は，F,G,H の偶置換項は + で，奇置換項は − で加えることを表す。定義 5-2 (26) を代入すれば，$\sum\{F,\{G,H\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}}=0$ 以外に次の項が出る (Paisson 括弧の添字 P は省略)：

$$\begin{aligned}
①&\equiv-\sum\{F,\{G,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{\phi_\beta,H\}\}\\
&=-2\sum\{G,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{F,\{\phi_\beta,H\}\}+\sum\{G,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{F,\{\phi_\beta,\phi_\gamma\}\}C^{-1}_{\gamma\delta}\{\phi_\delta,H\}\\
②&\equiv-\sum\{F,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{\phi_\beta,\{G,H\}\}\\
&=+2\sum\{F,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{H,\{\phi_\beta,G\}\}\\
③&\equiv+\sum\{F,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{\phi_\beta,\{G,\phi_\gamma\}C^{-1}_{\gamma\delta}\{\phi_\delta,H\}\}\\
&=2\sum\{F,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{\phi_\beta,\{G,\phi_\gamma\}\}C^{-1}_{\gamma\delta}\{\phi_\delta,H\}\\
&\quad-\sum(-)^{|\beta||\delta|}\{F,\phi_\alpha\}C^{-1}_{\alpha\beta}\{G,\phi_\gamma\}C^{-1}_{\gamma\varepsilon}\{\phi_\beta,\{\phi_\varepsilon,\phi_\kappa\}\}C^{-1}_{\kappa\delta}\{\phi_\delta,H\}.
\end{aligned}$$

ただし，Poisson 括弧の Leibnitz 則および Jacobi 恒等式を用いた。①の第 1 項と②とは反対称和 $\sum$ のため相殺する。①の第 2 項は，真ん中の因子 $\{F,\{\phi_\beta,\phi_\gamma\}\}$ に Jacobi 恒等式を用いれば $2\{\phi_\beta,\{F,\phi_\gamma\}\}$ に置き換えられて，③の第 1 項と ($F\leftrightarrow G$ 反対称和で) 相殺する。③の最後の項は，(F,G,H) の完全反対称性が，$(\beta,\varepsilon,\kappa)$ の graded な完全反対称性を意味し $\{\phi_\beta,\{\phi_\varepsilon,\phi_\kappa\}\}$ の Jacobi 恒等式で 0 となる。

5.2 $\pi_\psi\equiv\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}$，$\pi_{\psi^\dagger}\equiv\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}^\dagger$ とすると，次の二つの拘束条件が出る：

$$\phi_1\equiv\pi_\psi-i(1-\alpha)\psi^\dagger,\qquad \phi_2\equiv\pi_{\psi^\dagger}-i\alpha\psi.$$

これは，α によらず $\{\phi_1(\boldsymbol{x}),\phi_2(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{P}}=-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，$\{\phi_1,\phi_1\}_{\mathrm{P}}=\{\phi_2,\phi_2\}_{\mathrm{P}}=0$ となるから第 2 類拘束条件である。Dirac 括弧を 5-2 (26) で計算すれば

$$\{\psi(\boldsymbol{x}),\psi^\dagger(\boldsymbol{y})\}_{\mathrm{D}}=-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad \{\psi,\psi\}_{\mathrm{D}}=\{\psi^\dagger,\psi^\dagger\}_{\mathrm{D}}=0$$

となり，$i\{F,G\}_{\mathrm{D}}\rightarrow\{F,G\}\equiv FG+GF$ の量子化を行えば，簡便量子化で得た 2-2 (4), (5) の反交換関係に一致している。

5.3 付録 D (8) の公式 $\det(1+\varepsilon X)=\exp[\varepsilon\,\mathrm{tr}\,X+O(\varepsilon^2)]$ を使って，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}A'&=\mathrm{Det}(\delta A'^a_\mu(x)/\delta A^b_\nu(y))\cdot\mathcal{D}A\\
&=\mathrm{Det}[\delta^\mu_\nu\delta^4(x-y)(\delta^{ab}+gf^{abc}\theta^c(x))]\cdot\mathcal{D}A\\
&=\exp\left[4\int d^4x\sum_a gf^{aac}\theta^c(x)\cdot\delta^4(0)+O(\theta^2)\right]\cdot\mathcal{D}A.
\end{aligned}$$

ところが $f^{aac}=0$ であるから $\mathcal{D}A'=\mathcal{D}A$ が従う。物質場も $\mathrm{tr}\,T^a=0$ を使えば $\mathcal{D}\varphi'=\mathcal{D}\varphi$ がいえる。$U(1)$ 部分群が入っていると $\mathrm{tr}\ T^a\neq0$ であるが，そのようなときは大抵の場合，$\mathcal{D}\varphi$ と共に複素共役 $\mathcal{D}\varphi^*$ が入っており，$\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\varphi^*$ は不変になる。(言い方を変えれば，φ,φ^* を一つの可約表現にまとめれば $\mathrm{tr}\,T^a=0$ が成立している。)

5.5 $\phi_1e^{i\pi N_1}=e^{i\pi(N_1-1)}\phi_1=-e^{i\pi N_1}\phi_1$ より明らかであろう。

5.7 5-5 (1) の Lagrangian $\tilde{\mathcal{L}}$ に 5-6 (2) の外場項 $\mathcal{I}[J,K]$ を含めた作用積分を $S[\phi,J]=\int d^4x\ \tilde{\mathcal{L}}+\mathcal{S}[J,K]$ として，例えば

$$0=\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta B^a(x)}(e^{iS[\phi,J]})=\int \mathcal{D}\phi\,(\partial^\mu A^a_\mu(x)+\alpha B^a(x)+J^a_B(x))e^{iS[\phi,J]}$$
$$=\left\{\partial^\mu\left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}(x)}\right)+\alpha\left(\frac{\delta}{i\delta J^a_B(x)}\right)+J^a_B(x)\right\}\int \mathcal{D}\phi\ e^{iS[\phi,J]}.$$

$e^{iW[J,K]}=\int \mathcal{D}\phi\ e^{iS[\phi,J]}$ を使えば，これは

$$\partial^\mu\left(\frac{\delta W}{\delta J^{a\mu}(x)}\right)+\alpha\left(\frac{\delta W}{\delta J^a_B(x)}\right)+J^a_B(x)=0$$

を意味し，5-6 (7), (9) を使えば $\partial^\mu A^a_\mu(x)+\alpha B^a(x)-\delta\Gamma/\delta B^a(x)=0$，すなわち 5-6 (12) が従う。5-6 (13) も $\int \mathcal{D}\phi\,(\delta/\delta\bar{c}^a(x))e^{iS[\phi,J]}=0$ から出発すれば同様に導ける。

5.8 後半は，1-3 (30) の Lorentz 変換則を共変ベクトルの場 $A^{\rm as}_\mu(x)$ に適用し，

$$[M_{\rho\sigma}, A^{\rm as}_\mu(x)]=-L_{\rho\sigma}A^{\rm as}_\mu(x)-i(g_{\rho\mu}\delta^\nu_\sigma-g_{\sigma\mu}\delta^\nu_\rho)A^{\rm as}_\nu(x).$$

ただし，$(S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu$ の表式として 1-1 (25) の μ,ν 添字を上げ下げしたものを用いた。$\boldsymbol{k}$ が Z 軸を向いている場合を考えれば十分だから，$M_{\rho\sigma}=M_{12}=J_3$ ととって

$$J_3\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\pm)|0\rangle=[J_3, a^\dagger(\boldsymbol{k},\pm)]|0\rangle=-([J_3, A^{\rm as}(x)], f^{(\pm)}_{\boldsymbol{k}})|0\rangle$$
$$=+i\int d^3x[L_{12}A^{\rm as}_\mu(x)+i(g_{1\mu}A^{\rm as}_2(x)-g_{2\mu}A^{\rm as}_1(x))]\overleftrightarrow{\partial}_0 f^{(\pm)\mu}_{\boldsymbol{k}}(x)|0\rangle.$$

$L_{12}=-i(x\partial/\partial y-y\partial/\partial x)$ は，部分積分して $f^{(\pm)\mu}_{\boldsymbol{k}}(x)=(0,\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{k}))e^{-ikx}/\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}$ に演算すれば，$\boldsymbol{k}=(0,0,k)$ だから落ちる。偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{(\pm)}(\boldsymbol{k})$ の表式 5-6 (40) を代入すれば，

$$J_3\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\pm)|0\rangle=\frac{i}{\sqrt{2}}[a^{2\dagger}(\boldsymbol{k})\mp ia^{1\dagger}(\boldsymbol{k})]|0\rangle=\pm 1\ a^\dagger(\boldsymbol{k},\pm)|0\rangle$$

を得る。ただし，$a^{\mu\dagger}(\boldsymbol{k})=g^{\mu\nu}a^\dagger_\nu(\boldsymbol{k})$ は 5-6 (32) で定義した生成演算子で，$a^\dagger(\boldsymbol{k},\pm)=[a^{1\dagger}(\boldsymbol{k})\pm ia^{2\dagger}(\boldsymbol{k})]/\sqrt{2}$ の関係を用いた。

5.9 問題の条件より，与えられた群の添字 a のチャネルで

$$\text{F.T.}\langle 0|\text{T}\ A^a_\nu(x)A^a_\rho(y)|0\rangle|_{\text{零質量 pole 部分}}=Z_3 g_{\nu\rho}/ip^2+(p_\nu p_\rho\ \text{比例項}).$$

これに ∂^x_μ を演算し，それから $\mu\leftrightarrow\nu$ 交換したものを引き，さらに ∂^ν_x を演算して

$$\text{F.T.}\langle 0|\text{T}\ \partial^\nu f^a_{\mu\nu}(x)A^a_\rho(y)|0\rangle|_{\text{零質量 pole 部分}}=iZ_3 p_\mu p_\rho/p^2.$$

(T は T* 積であることに注意。) これと，恒等式 5-6 (21) から従う

$$\text{F.T.}\langle 0|\text{T}\ \partial_\mu B^a(x)A^a_\rho(y)|0\rangle=-ip_\mu p_\rho/p^2$$

とを比較すれば，$\partial^\nu f^a_{\mu\nu}(x)\ \underset{x_0\to\pm\infty}{\longrightarrow}\ -Z_3\partial_\mu\beta^a(x)+\cdots$ がわかる。

5.11 1) $[Q_{\rm B},\phi(x)]=0$ より $Q_{\rm B}\phi(x)|0\rangle=0$ だから，$1=P^{(0)}+\sum_{n=1}^\infty P^{(n)}=P^{(0)}+\{Q_{\rm B}, R\}$ $(R\equiv\sum_{n=1}^\infty R^{(n)})$ を用いて

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\langle 0|\phi(x)(P^{(0)}+\{Q_{\mathrm{B}}, R\})\phi(y)|0\rangle=\langle 0|\phi(x)P^{(0)}\phi(y)|0\rangle.$$

よって，$\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ の中間状態には $|\alpha\rangle\in P^{(0)}\mathcal{V}=\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ しか効かない。正定値空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ の完全系 $P^{(0)}=\sum_{\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|$ を用いれば **3-1** のスペクトル表示の導出は変更なしに成立し $\rho(\sigma^2)\geqq 0$ は明らか。

2） $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ の元はすべてゴースト数 $N_{\mathrm{FP}}=0$ の状態であるから $e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}P^{(0)}=P^{(0)}e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}=P^{(0)}$ が成立することおよび上の表式 $P^{(0)}=1-\{Q_{\mathrm{B}}, R\}$ を用いて

$$\mathrm{tr}(P^{(0)}e^{-\beta H})=\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}P^{(0)}e^{-\beta H})=\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-\beta H})-\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}\{Q_{\mathrm{B}}, R\}e^{-\beta H}).$$

ところが最後の第 2 項は，Q_{B} がゴースト数 $N_{\mathrm{FP}}=1$ の演算子であるから $e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}Q_{\mathrm{B}}=-Q_{\mathrm{B}}e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}$ が成り立つこと，および Hamiltonian H の BRS 不変性 $[Q_{\mathrm{B}}, H]=0$，トレースの巡回対称性を使えば 0 であることがわかる；実際

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}Q_{\mathrm{B}}Re^{-\beta H})&=-\mathrm{tr}(Q_{\mathrm{B}}e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}Re^{-\beta H})=-\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}Re^{-\beta H}Q_{\mathrm{B}})\\&=-\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}RQ_{\mathrm{B}}e^{-\beta H})\end{aligned}$$

となるからである。よって $\mathrm{tr}(P^{(0)}e^{-\beta H})=\mathrm{tr}(e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-\beta H})$ が示された。次に **4-2** (37) より $\overset{(-)}{c}(\boldsymbol{x}, -i\tau)=e^{\tau H}\overset{(-)}{c}(\boldsymbol{x})e^{-\tau H}$ であることを用いて，FP ゴーストの温度 Green 関数は

$$\begin{aligned}G_{\beta}(\tau_1, \tau_2)&\equiv\mathrm{tr}[e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-\beta H}T_{\tau}(c(\boldsymbol{x}, -i\tau_1)\bar{c}(\boldsymbol{y}, -i\tau_2))]/Z_{\beta}\\&=\begin{cases}\mathrm{tr}[e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{(\tau_1-\tau_2-\beta)H}c(\boldsymbol{x})e^{-(\tau_1-\tau_2)H}\bar{c}(\boldsymbol{y})]/Z_{\beta} & (0<\tau_1-\tau_2<\beta)\\-\mathrm{tr}[e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-(\tau_1-\tau_2+\beta)H}\bar{c}(\boldsymbol{y})e^{(\tau_1-\tau_2)H}c(\boldsymbol{x})]/Z_{\beta} & (-\beta<\tau_1-\tau_2<0)\end{cases}\end{aligned}$$

であるから，まず，$G_{\beta}(\tau_1, \tau_2)$ は差 $\tau_1-\tau_2$ のみの関数 $G_{\beta}(\tau_1-\tau_2)$ である。次に，$-\beta<\tau<0$ として，$\tau_1=\tau+\beta>0, \tau_2=0$ を代入した第 1 表式 $G_{\beta}(\tau+\beta)$ と，$\tau_1=\tau<0$, $\tau_2=0$ を代入した第 2 表式

$$\begin{aligned}-\mathrm{tr}[e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-(\tau+\beta)H}\bar{c}(\boldsymbol{y})e^{\tau H}c(\boldsymbol{x})]/Z_{\beta}&=-\mathrm{tr}[e^{\tau H}c(\boldsymbol{x})e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{-(\tau+\beta)H}\bar{c}(\boldsymbol{y})]\\&=+\mathrm{tr}[e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}e^{\tau H}c(\boldsymbol{x})e^{-(\tau+\beta)H}\bar{c}(\boldsymbol{y})]\end{aligned}$$

を比較すれば，周期性 $G_{\beta}(\tau+\beta)=G_{\beta}(\tau)$ を得る。ただし，ここで，$e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}$ の因子の存在のために，$c(\boldsymbol{x})e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}=-e^{i\pi N_{\mathrm{FP}}}c(\boldsymbol{x})$ となって，通常のフェルミオンの反周期性ではなく，周期性がでたことに注意する。

索　引

九後（くご） 汰一郎（たいちろう） 略歴

1949年　京都市に生まれる
1971年　京都大学理学部物理学科卒業
1976年　京都大学理学博士
1977～78年　Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik (München) 研究員
1978年　京都大学理学部助手
1981年　京都大学理学部助教授
1993年　京都大学理学部教授

主要著書

"Local Covariant Operater Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem", Prog. Theor. Phys. Supplement No. 66 (1979)　(共著，理論物理学刊行会)
"Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries", Physics Reports **164** (1988)
(共著，North-Holland Publishing Company)

1989 年 7 月 20 日　初 版 発 行
1993 年 9 月 30 日　初版第 6 刷発行

新物理学シリーズ 23
ゲージ場の量子論 I

著 者　九後汰一郎
発行者　山 本 格

発 行 所　株式会社 培 風 館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話(03)3262-5256(代表)・振替 東京4-44725

寿 印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-02423-6 C3342